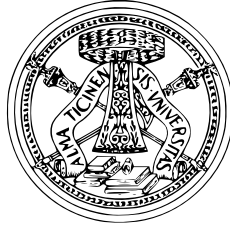


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN SCIENZE FISICHE



LOCALITÀ, REALISMO E DETERMINISMO IN TEORIE PROBABILISTICHE

RELATORE PROF. GIACOMO MAURO D'ARIANO
CORRELATORE I DOTT. PAOLO PERINOTTI
CORRELATORE II DOTT. STEFANO FACCHINI

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA DI
FRANCO MANESSI

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

INDICE

1	INTRODUZIONE	1
1.1	Determinismo e causalità	3
1.2	Realismo	5
1.2.1	Il realismo tramite memorie locali	7
1.3	Il programma a variabili nascoste	10
1.4	L'approccio operativo	11
1.5	Le fondamenta della meccanica quantistica	12
1.6	Scopo e contenuto della tesi	13
2	TEORIE PROBABILISTICHE OPERAZIONALI	15
2.1	Test e sistemi	15
2.1.1	Composizione sequenziale	18
2.1.2	Composizione parallela	19
2.2	Teorie probabilistiche operazionali	20
2.2.1	Preparazioni e osservazioni	21
2.2.2	Coarse-graining e raffinamento di test	24
2.3	Il principio di no-signaling	25
2.3.1	Caratterizzazioni alternative di teorie operazionali causali	27
2.3.2	Test condizionati	30
2.3.3	No-signaling senza interazione	32
2.3.4	La non-causalità	33
2.4	Discriminabilità locale	34
2.5	Purificazione	36
3	VINCOLI PROBABILISTICI DEL REALISMO	39
3.1	Formalizzazione matematica	40
3.1.1	Il framework	43
3.1.2	λ -indipendenza e single-valuedness	45
3.1.3	Determinismo debole, forte e indipendenza dagli outcome	47
3.1.4	Indipendenza dai parametri	49
3.1.5	Località	50
3.2	Teoremi no-go	50
3.2.1	Il paradosso EPR	51
3.2.2	Il teorema di Bell	52
3.3	Estensioni dei teoremi precedenti	55
3.3.1	Il paradosso EPR in versione debole	56
3.3.2	Non-località di Hardy-Cabello	56
3.4	Teoremi no-go e proprietà delle teorie operazionali	62
3.4.1	EPR	62
3.4.2	Non-località di Hardy-Cabello	65
3.4.2.1	Test in cascata	66
3.4.2.2	Stato bipartito	70
4	FREE WILL	75
4.1	Gli assiomi	76
4.1.1	Gli assiomi SPIN e TWIN	76
4.1.2	L'assioma MIN	77
4.2	L'ipotesi di free will	79
4.2.1	Free will, modelli operazionali e formalismo di A. Brandenburger e N. Yanofsky	80

4.2.1.1	Free will Vs causalità	83
4.2.1.2	Free will per modelli a variabili nascoste	84
4.3	Il paradosso di Kochen-Specker	85
4.4	La consistenza interna degli assiomi	87
4.4.1	L'universo esagonale	87
4.4.2	Modello con agente per gli assiomi SPIN, TWIN, MIN	89
4.5	Il teorema del free will	89
4.6	Il caso stocastico e le posizioni contrarie	91
4.7	"What does the FWT actually prove?"	95
5	CONCLUSIONI	99
APPENDICE		101
A	POLITOPPI E POLITOPPI CONVESSI	103
B	IL TEOREMA DI KOCHEN-SPECKER	105
B.1	Dimostrazione di A. Cabello	107
B.2	Argomento geometrico in dimensione 3	109
BIBLIOGRAFIA		111

1

INTRODUZIONE

Non c'è dubbio che ogni nostra conoscenza incomincia con l'esperienza

Critica della ragion pura

IMMANUEL KANT

CHE cos'è la conoscenza scientifica? Per dare una risposta esauriente a tale quesito, si mostra innanzitutto necessario definire cosa si intenda per *conoscenza*. Nell'accezione più generale, il termine si riferisce ad una qualunque tecnica in grado di descrivere, calcolare o prevedere un oggetto, dove con il termine oggetto ci si riferisce a una qualsiasi entità, fatto, cosa, realtà o proprietà. Tali tecniche possono essere riferite sia agli organi di senso, che a complicati strumenti di calcolo; in ogni caso entrambi consentono accertamenti controllabili, dove la controllabilità è da intendersi come ripetibilità. Non è necessario che l'algoritmo che permette l'accertamento sia infallibile o esauriente: non bisogna cioè credere che esista una tecnica di accertamento che, una volta eseguita su una determinata conoscenza, ne renda inutile ogni ulteriore applicazione. [1]

La ripetibilità è un presupposto fondamentale, tale da far decadere al rango di credenza ogni tentativo di considerare vera un'entità, un fatto, una proprietà non accertabile. La conoscenza si basa pertanto su quella che, nell'ambito filosofico, è chiamata *esperienza*. Tale termine può essere inteso in due accezioni differenti: [1]

- A. la partecipazione personale a situazioni ripetibili, come nell'espressione: "Alice ha esperienza di un fenomeno x ";
- B. quale mezzo per controllare le possibili soluzioni che essi consentono, come nell'espressione: "l'esperienza ha dato ragione ad Alice"

In **A** il termine *esperienza* ha un significato prettamente soggettivo e rende necessaria l'introduzione del concetto di partecipazione. In **B** invece, il carattere è intrinsecamente oggettivo, e pertanto asserire che una proposizione x sia verificabile non implica che chiunque faccia tale affermazione debba necessariamente aver partecipato alla situazione che ne permetta la verifica. In entrambi i casi l'elemento comune è però la ripetibilità.

Si noti che l'esperienza non è da intendersi nella sua mera accezione di esperienza sensibile. Nella seconda accezione però suppone una condizione fondamentale, senza la quale la funzione di controllo verrebbe a mancare: l'esperienza a cui ci si riferisce deve essere indipendente dalle credenze che è chiamata a controllare, in modo che non siano le credenze stesse a determinare il proprio controllo. Questa funzione di controllo da parte dell'esperienza è indissolubilmente legata alla definizione di scienza, così da giungere alla definizione di conoscenza scientifica.

La *scienza*, non è altro che una conoscenza che include al suo interno in un qualche modo, e in una qualche misura, la garanzia della propria validità. Non è richiesto che tale garanzia sia assoluta, e in tal modo si riesce a salvare il concetto moderno di scienza. A seconda delle interpretazioni questa assicurazione di validità può presentarsi sotto varie forme: nella dimostrazione, nella descrizione o nella correggibilità. La prima accezione coincide con la visione classica, in cui il carattere necessario¹ delle dimostrazioni permette

L'esperienza come base per la conoscenza

La scienza

¹ Necessario è da intendersi in senso tecnico:

la reciproca connessione tra le varie proposizioni fino alla costituzione di un organismo unitario nel quale ciascuna affermazione non può essere tolta o mutata. Tale ideale classico di scienza come sistema di verità necessarie per evidenza o per dimostrazione è definitivamente tramontato. Le nuove concezioni non rigettano però tutto quanto l'accezione classica affermava, in particolare mantiene l'idea che la scienza sia un insieme di affermazioni compatibili fra loro.²

La scienza come conoscenza
auto-correttiva

Tralasciando per brevità l'interpretazione descrittiva nata durante l'illuminismo, la terza concezione, quella basata sull'auto-correggibilità, è nata tra le avanguardie più critiche e meno dogmatiche della metodologia contemporanea. In quest'ottica la scienza perde qualunque valenza assolutista e diviene una frammentaria collezione di proposizioni fra loro compatibili, nessuna delle quali è data per certa. Ogni affermazione è accettata fintanto che trova riscontro sperimentale. Tale visione, nata con il *verificazionismo* nell'ambito del Circolo di Vienna, si sviluppò sotto varie sfaccettature, e culminò nel *falsificazionismo* di K. Popper. A dispetto dei nomi, non si deve pensare che il falsificazionismo popperiano sia in contrapposizione con il verificazionismo del pensiero neopositivista dell'inizio novecento. Esso è semplicemente una versione meno ingenua del verificazionismo ed entrambi si basano sulla concezione fallibilista secondo la quale ogni ipotesi o teoria (non solamente scientifica) si configura come una congettura suscettibile di confutazione. Che il principio verificazionista, alla base del verificazionismo, fosse di dubbio fondamento risultò chiaro ancor prima che a K. Popper. Tale principio costituirebbe il metro di demarcazione tra proposizioni sensate e proposizioni insensate, e pertanto, quale criterio di significanza, riconosce validità solamente alle affermazioni passibili di verifica empirica. Una semplice applicazione della *consequentia mirabilis* mostra però l'infondatezza di tale principio: esso infatti o è un'affermazione fattuale, e quindi non può assurgere a norma assoluta, oppure si assume come principio universale – quindi non verificabile – cadendo così in una *impasse*, visto che il principio stesso impone che esso stesso non abbia senso.

La conoscenza scientifica

Nonostante gli sviluppi successivi al neopositivismo abbiano cercato di andare oltre al falsificazionismo popperiano, tutte le interpretazioni moderne di scienza si basano sul criterio di auto-correzione delle discipline scientifiche. Pertanto, rispondendo alla domanda posta all'inizio del capitolo, conoscenza scientifica è: conoscenza in grado di correggersi da sola e che ha come criterio correttivo la conformazione all'esperienza, intesa come fenomeno ripetibile.

Ma qual'è l'oggetto della conoscenza scientifica? Inoltre, se è vero che la compatibilità con i fatti sensibili costituisce il fondamento della richiesta di correggibilità, su cosa si fonda invece il fine ultimo della scienza, ossia la speranza di riuscire a tendere tramite ripetuti *trial and error* ai principi universali che regolano il comportamento dei fenomeni osservati?³ Lo sviluppo della fisica del XX secolo, e in particolare della meccanica quantistica, ha messo seriamente in crisi quelle che sono state considerate per secoli le risposte a queste due domande: ossia da un lato l'esistenza di un mondo esterno (un mondo reale) nel quale lo sperimentatore passivamente raccoglie i suoi dati senza modificarlo sensibilmente, e dall'altro un principio di causalità vigente tra i fenomeni che la scienza vuole studiare, collegato indissolubilmente con il concetto di determinismo.

Le insidie dell'indeterminismo
quantistico

La meccanica quantistica è una teoria fisica in grado di fare previsioni su scala infi-

La necessità è la modalità logico-linguistica per cui, nelle asserzioni predicative, il concetto espresso dal predicato non può non inerire al concetto espresso dal soggetto; pertanto, la necessità logica: è il contrario dell'impossibile; essa è espressa mediante asserzione tautologica, comporta l'esclusione del suo contrario ed è contraddittoria con il contingente. (Maiorca, L., Dizionario di filosofia, Loffredo Editore, 2001).

- 2 Nell'accezione classica in realtà si richiedeva la dimostrabilità delle varie affermazioni fra loro; ciò senz'altro implica la compatibilità delle varie proposizioni, ma non viceversa. Pertanto l'accezione classica è strettamente più forte delle varie accezioni moderne.
- 3 Si noti il verbo *tendere*, e non *raggiungere*: nella visione comunemente accettata la scienza non è in grado di giungere a delle verità ultima, potrà solo cercare di tendervi, raffinando sempre più le proprie ipotesi/congetture/teorie in modo da renderle le più concordi possibili con l'esperienza.

nitamente piccola con una sterminata quantità di conferme sperimentali. Nonostante ciò la natura delle previsioni è intrinsecamente probabilistica. Il problema a livello di interpretazione non può lasciare indifferenti: se le previsioni statistiche di una teoria macroscopica possono essere facilmente interpretate come frutto dell'ignoranza dello sperimentatore nel caratterizzare le proprietà microscopiche dei sistemi (si pensi alla meccanica statistica), e pertanto recuperare il determinismo a livello microscopico, non è altrettanto facile trasportare tale interpretazione ad una teoria che ha specificatamente come suo campo d'azione il mondo dell'estremamente piccolo. Il noto programma dell'interpretazione della meccanica quantistica tramite l'ausilio di *variabili nascoste* mira esattamente a questo: recuperare il determinismo ad un livello descrittivo più fine rispetto a quello della meccanica quantistica. Usando una terminologia introdotta da A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, la meccanica quantistica sarebbe pertanto incompleta, nel senso che un tipico stato quantistico, descrizione di un determinato sistema fisico, potrebbe essere completato da una descrizione più esaustiva in termini di quantità chiamate per l'appunto variabili nascoste. In una teoria del genere le probabilità quantistiche sono naturalmente interpretate come probabilità *epistemiche*.⁴

Una descrizione a variabili nascoste può non essere praticamente utile, ma ciò non implica che non sia possibile almeno in linea di principio; anche nel caso non porti ad alcun beneficio pratico, un'interpretazione a variabili nascoste della meccanica quantistica permetterebbe di recuperare il concetto di determinismo – e quindi anche di causalità – almeno ad un livello *sub-quantistico*.

Prima di proseguire vale la pena approfondire i due concetti che l'interpretazione a variabili nascoste vorrebbe salvare, che altro non sono se non le risposte alle due domande poste in precedenza in relazione alla conoscenza scientifica: il *realismo* da un lato, e un qualche principio di causalità dall'altro – e quindi una specifica concezione di *determinismo*.

1.1 DETERMINISMO E CAUSALITÀ

Nell'ambito del sensibile, con il termine determinismo si intende la concezione in cui il rapporto causa-effetto viene assunto come necessario, e come tale elevato a principio primo e fondante della totalità dei fenomeni fisici. Ciò implica che, una volta fissati una serie di dati iniziali, l'evoluzione di un sistema non possa in alcun modo non essere quella che si verificherà. Tale definizione sposta il problema, alla necessità di spiegare cosa si intende per causalità. In un'accezione il più generale possibile, quest'ultimo termine identifica una connessione tra due eventi, grazie alla quale è possibile predire il secondo conoscendo il primo. [1]

Storicamente il concetto di causa è stato sviluppato in due forme differenti: in una prima accezione la connessione causale è un legame razionale, per il quale la causa è ragione del suo effetto, rendendolo perciò *deducibile* da essa. In una seconda invece la causa identifica una forma di connessione empirica grazie alla quale l'effetto non è deducibile dalla causa, bensì è *prevedibile* grazie alla costanza del rapporto di successione. In entrambe le concezioni il rapporto causale è *necessario*, dato che la prevedibilità della conseguenza è univoca e infallibile.

La prima introduzione del concetto di causa avviene con Platone ma è solo con Aristotele che si arriva ad una analisi sistematica. Sebbene espressa con parole e concetti

La causa come strumento deduttivo

⁴ È possibile distinguere due tipi di probabilità nell'ambito della fisica: le probabilità *epistemiche* e quelle *non-epistemiche*. Le prime identificano le conclusioni di un modello espresse in modo probabilistico a causa dell'ignoranza sullo stato del sistema in esame: tale visione è un chiaro specchio della soggiacente visione meccanicista figlia dell'illuminismo. [16] Le seconde denotano una descrizione probabilistica non dovuta al frutto di ignoranza descrittiva.

oramai non propri della fisica, la loro interpretazione della relazione causale è collegata alla presenza del concetto di *forza*, quale entità in grado di determinare necessariamente l'evoluzione di un fenomeno, che renda cioè conoscibile a priori, ergo deducibile, un evento a partire da un altro. Questa concezione del rapporto causale è stata di fatto il *leitmotiv* della scienza del XIX secolo, e senz'alcuna ombra di dubbio P. S. Laplace ha condensato tale pensiero in quella che può essere considerata l'insegna del programma scientifico di quell'epoca:

*Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome, rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.*⁵

La causa come strumento
predittivo

Anche la seconda accezione del concetto di causalità – sviluppatosi parallelamente al precedente – pur fondato solamente sul rapporto di prevedibilità certa e perciò epurato da un concetto metafisico di forza e dalla deduzione apodittica dell'effetto a partire dalla causa, non mette in dubbio la prevedibilità certa ed infallibile dei fatti naturali di cui siano conosciuti i rapporti causali, e pertanto conferma il sotteso carattere necessitante (seppure in termini diversi dall'interpretazione precedente).

Nonostante ciò, i progressi del calcolo delle probabilità, la teoria cinetica dei gas, ma soprattutto l'avvento della meccanica quantistica, hanno introdotto in modo sempre più prepotente il concetto di *indeterminismo*, contribuendo così all'abbandono di un principio causale necessario.

La critica humiana al
principio causale

Non è necessario arrivare al XX secolo per incontrare forti critiche al criterio causale, o, da un altro punto di vista, al valore necessitante del principio induttivo. Con il famoso esempio delle palle da biliardo D. Hume nel XVIII secolo negò la possibilità di inferire una conseguenza B tramite un ragionamento a priori partendo da un fatto A. Negò inoltre la possibilità di fondare un principio causale tramite un ragionamento a posteriori, dal momento che esso mostrerebbe solamente una consequenzialità temporale tra A e B, senza poter inferire nulla su di un legame intrinseco tra i due eventi, sicché se empiricamente si verifica ogni volta che A è seguito da B non si può dire nulla sulla veridicità di questa consequenzialità temporale per le volte successive.⁶ D. Hume concluse quindi che una qualsiasi connessione tra causa ed effetto è *arbitraria*, e pertanto è arbitraria una qualunque previsione basata su di essa. Il rapporto causale, essendo ingiustificabile, diviene pertanto un dogma a cui si è portati a credere per la sua innegabile utilità.

La meccanica quantistica e la
crisi del principio causale

Se da un lato ci furono risposte alla critica humiana (ad esempio quella kantiana), con l'avvento della fisica atomica ogni tentativo di fondare il rapporto causale sulla necessità sembrò divenire vano. La meccanica quantistica presenta sia fenomeni deterministici che non: l'evoluzione unitaria dello stato dovuta all'equazione di Schrödinger identifica un determinismo nell'evoluzione libera delle funzioni d'onda. Dall'altro lato però il processo di misura è intrinsecamente stocastico, e pertanto non deterministico nel senso classico del termine. A livelli microscopici, tranne casi particolari, ad ogni misurazione è connessa una perturbazione finita e incontrollabile sullo stato del sistema. Poiché ogni descrizione spazio-temporale di un fenomeno necessita un'osservazione si conclude che essa è *ipso facto* in conflitto con il principio di causalità come stato inteso fino ad allora.

Verso un nuovo concetto di
causalità

Nel corso del XX secolo si sono sviluppate due strade nel tentativo di conciliare il

⁵ Laplace, P. S., *Essai philosophique sur les probabilités*, Cambridge University Press, 1814.

⁶ Per poterlo fare servirebbe un principio in grado di assicurare che quelle che vengono identificate leggi di natura rimangano immutabili nel tempo (principio di uniformità della natura), ma esso stesso è indeducibile al pari della causalità. Tal argomento proposto da D. Hume è di fatto l'analogo della critica popperiana al fondamento del principio induttivo come fonte di conoscenza.

concetto di causalità/determinismo con il progresso scientifico:

- A. concezioni epistemologiche che propongono di abbandonare quello che oramai è da considerare un desueto concetto di casualità per lasciar spazio a concetti scientificamente meno problematici come quello di *successione costante* o di *variazione concomitante*. Si tratta pertanto di considerare una versione più debole del concetto di determinismo e in particolare accettare una proprietà di contingenza per un eventuale sostituto del concetto di causa, che verrebbe così a perdere il suo carattere necessitante;
- B. dall'altro lato ci sono i tentativi di rielaborare il concetto di causa in modo da renderla compatibile con gli sviluppi scientifici contemporanei, senza però per questo abbandonare la sua valenza necessaria. Questa volontà, retaggio del pensiero classico, è da ricercare nella constatazione che richiedere la spiegazione di un evento vuol dire spesso proprio saperne la causa.

In ogni caso, sempre e comunque, le considerazioni di D. Hume devono essere date per assunte: l'accettazione di un qualunque principio di causalità è in ultima istanza una scelta arbitraria da parte della scienza, dal momento che non può né essere dedotta, né tanto meno indotta.

Cosa comportano rispettivamente le due posizioni precedenti nell'ambito scientifico?

- A. nel processo di misura quantistico questo nuovo tipo di causalità parzialmente contingente si manifesterebbe nella capacità di prevedere i possibili risultati di una misura, senza però essere in grado di discernere quale possibilità si verificherebbe effettivamente. Nell'ambito quantistico si traduce nell'accettare l'interpretazione ortodossa, e pertanto le probabilità sono da considerarsi non-epistemiche;
- B. il nuovo concetto di causalità deve essere in grado di comprendere al suo interno gli insegnamenti della teoria della relatività,⁷ senza però perdere il suo carattere necessario. Per farlo le probabilità quantistiche devono essere considerate epistemiche.

Il programma dell'interpretazione della meccanica quantistica tramite l'ausilio di variabili nascoste si basò in prima istanza proprio su questo secondo approccio e pertanto sul tentativo di mantenere la visione classica del concetto di causalità: la speranza iniziale fu infatti quella di riuscire a proporre un'interpretazione causalmente deterministica – quindi necessaria – per le previsioni del formalismo quantistico.

1.2 REALISMO

L'interpretazione a variabili nascoste non si fonda solamente su un principio di causalità necessario.⁸ Di fatto c'è un'assunzione sottesa a tutta l'interpretazione: la concezione realista del mondo.

L'argomento è delicato, poiché il concetto di realismo è molto liquido, con tante accezioni differenti (anche nel solo ambito scientifico), e come se non bastasse in letteratura è molto raro trovare un autore che sia chiaro su cosa egli intenda con tale termine. Questa mancanza di chiarezza è stata fatta presente da T. Norsen in quello che forse è l'unico

⁷ Ci si riferisce al vincolo che due eventi per essere causalmente connessi devono avere una separazione *time-like*.

⁸ Per lo meno nelle prime formulazioni. Dopo il teorema di Bell apparve oramai chiaro che il determinismo (ma non solo), unitamente ad altre ipotesi – la località – fosse una richiesta non compatibile con la meccanica quantistica. Da quel momento il programma a variabili nascoste non fu più spinto dalla volontà di mantenere la causalità/determinismo, bensì dal conservare una visione realista del mondo, nell'accezione che di seguito verrà illustrata.

articolo volto a esporre in quali varie accezioni questa parola è intesa più o meno consapevolmente in letteratura. [31]

Il concetto di realismo

Il realismo nel senso più generale possibile indica la credenza in particolari tipi di entità, caratterizzata dalle seguenti due caratteristiche: [1]

OGGETTIVISMO: gli oggetti posti esistono e possiedono determinate caratteristiche del tutto *indipendenti* dagli stati epistemici del soggetto che conosce;

OGGETTO-CENTRISMO: il protagonista del processo conoscitivo è l'oggetto, a cui il soggetto conoscente deve adeguarsi.

A seconda degli oggetti a cui il realismo si applica si possono distinguere vari tipi di realismo che T. Norsen cerca di chiarire nell'ambito scientifico.

La visione realista su cui si fonda la scienza

Ci sono due tipi di realismo sui quali la scienza fondamentale si basa, e il cui rifiuto rende vana l'attività conoscitiva scientifica:

REALISMO METAFISICO: esiste un mondo oggettivo esterno all'osservatore, ed indipendente dalla consapevolezza di qualcuno. Questo mondo esterno, reale, non è però necessario sia conforme al mondo percepito sensibilmente dall'uomo.

REALISMO PERCETTIVO: come il realismo metafisico, con la specificazione che i sensi percettivi consentono un accesso diretto ai fatti inerenti il mondo esterno.

Il realismo metafisico assicura che esista un qualcosa all'esterno del pensiero dell'uomo (nega cioè un *solipsismo a livello del sensibile*) e che gli strumenti a disposizione dello sperimentatore siano in grado di fornire una qualche verità inerente a quel mondo:

Perceptual Realism denies that we are systematically deluded, about the real state of the world, by our perceptual experience. [31]

Il realismo percettivo (e quindi anche quello metafisico) è a fondamento dell'*empirismo*, base della scienza moderna in generale: l'empirismo infatti considera l'esperienza (da intendersi nell'accezione **B**) come una possibile fonte di verità.

If we can look at the flashing light and be systematically deluded about its color (e.g., we think it's red when it's green and vice versa, or our seeing red or green has no correlation whatever to the actually flashed color) then Perceptual Realism is false – and empirical science is hopelessly doomed. [31]

Una concezione più forte di realismo

Attualmente secondo il pensiero scientifico moderno il realismo metafisico e percettivo costituiscono la base su cui si fonda l'indagine scientifica. Esiste un modo ancora più forte di intendere il termine realismo; è propriamente l'accezione di realismo che è sempre stata data per scontata fino al XX secolo (ovviamente per quanto riguarda il solo ambito scientifico). È quello che viene comunemente chiamato *realismo del senso comune*, *realismo ingenuo* o *realismo naïve*. Secondo tale concezione, dando per assunte quelle di realismo metafisico e percettivo, il processo di misura è una semplice lettura passiva di una qualche proprietà del sistema fisico in esame, *preesistente* all'atto di misura.

L'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica è palesemente contro questa visione: sapere che al tempo t_0 la misura di un'osservabile A ha dato il risultato a non dà alcuna informazione sul valore di tale osservabile per $t < t_0$, e pertanto non si può dire nulla sull'esistenza o meno di tale quantità per tali t . Il realismo naïve, invece, implica che per tutti i tempi le osservabili quantistiche abbiano valori definiti indipendentemente dal fatto che vengano osservate o meno.⁹ Tale concetto può essere sublimato nella seguente celeberrima affermazione di A. Einstein:

I like to think that the moon is there even if I am not looking at it

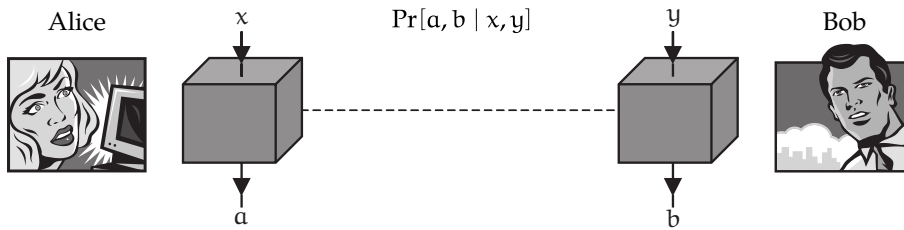


Figura 1.: Illustrazione dell'esperimento pensato di Popescu con Alice e Bob. Illustrazione presa da [3].

La visione della fisica fino al XX secolo si è basata sul realismo naïve, e l'avvento della meccanica quantistica ha messo in discussione questa concezione. Il programma a variabili nascoste cerca di ripristinare tale visione: le variabili nascoste, sarebbero quelle quantità *reali*, preesistenti in ogni sistema rispetto ad un qualsiasi atto di misura, in grado di riprodurre le probabilità epistemiche quantistiche. Esse costituirebbero un livello di dettaglio superiore ed effettivamente esistente. Anzi, il livello descrittivo più fine possibile: è la meccanica quantistica a non essere in grado di inquadrarle nel suo apparato descrittivo, risultando pertanto incompleta.

Concludendo, nel tema delle variabili nascoste, cosa si intende quindi con il termine realismo? È il concetto di realismo naïve, pertanto dell'esistenza effettiva di quantità – le variabili nascoste – indipendentemente dall'atto conoscitivo dello sperimentatore. In ultima istanza l'espressione *la meccanica quantistica ammette/non ammette un'interpretazione realista*, è da intendersi come *esiste/non esiste un'interpretazione a variabili nascoste in accordo con le previsioni quantistiche*. In seguito sarà sempre questa l'accezione con cui verrà inteso il termine realismo, senza la necessità di doverne specificare il tipo.

Realismo naïve e variabili nascoste

1.2.1 Il realismo tramite memorie locali

Si vuole ora mostrare una caratterizzazione alternativa dell'assunzione di realismo in grado di mettere in luce in modo più chiaro la connessione tra l'esistenza di quantità pre-esistenti all'atto della misura e la possibilità di poter parlare di variabili nascoste. Tale visione è a tutti gli effetti l'attuale *standard de facto* dell'idea di realismo naïve. [28] L'esempio che verrà riportato (raffigurato nell'immagine 1) oltre a rendere chiaro quest'aspetto, servirà anche ad illustrare informalmente le relazioni che intercorrono tra i concetti di non-località e comunicazione super-luminale.

Si supponga che due sperimentatori, Alice e Bob, siano separati svariati anni luce, e volendo mantenere un contatto, si rivolgono ad una nota impresa del settore delle telecomunicazioni alla ricerca di una soluzione che permetta loro di comunicare istantaneamente. Vengono loro proposte le seguenti tre alternative. In tutti i casi ogni dispositivo di comunicazione è costituito da due componenti (o terminali, o *endpoint*) separati su ognuno dei quali sono presenti dei pulsanti e una lampadina; sia Alice che Bob ne possiedono uno. Quando Alice o Bob vogliono comunicare devono premere ciascuno un bottone a scelta e osservare lo stato della lampadina: in funzione dei bottoni che entrambi schiacciano la lampadina si illumina su ogni componente in maniera differente. Il numero di bottoni di ciascun terminale, e il modo in cui sono correlate le accensioni delle luci sui due *endpoint* in funzione dei bottoni che vengono premuti, differenziano i tre dispositivi presentati ad Alice e Bob.

Il primo *device* è costituito da un bottone per ogni componente e le correlazioni fra i due terminali sono tali da garantire una corrispondenza perfetta tra le lampadine di Alice

Device a un bottone

⁹ Nello specifico tale proprietà in letteratura viene chiamata *definitezza dei valori*.

A	B	a	b	Pr[a, b A, B]
0	0	0	0	1/2
		1	1	1/2
0	1	0	1	1/2
		1	0	1/2
1	0	0	1	1/2
		1	0	1/2
1	1	0	0	1/2
		1	1	1/2

(a) Correlazioni locali

A	B	a	b	Pr[a, b A, B]
0	0	0	0	1/2
		1	1	1/2
0	1	0	0	1/2
		1	1	1/2
1	0	0	0	1/2
		1	1	1/2
1	1	0	1	1/2
		1	0	1/2

(b) Correlazioni non-locali

Tabella 1.: Correlazioni in un *device* a due bottoni

e Bob: alla pressione del bottone da parte di entrambi o sono entrambe accese o entrambe spente. L'accensione o lo spegnimento sono casuali (con probabilità 1/2). Dovrebbe essere lapalissiano che questa macchina non consente comunicazione istantanea: ognuno non ha modo di influenzare il funzionamento della macchina dal momento che c'è un solo pulsante; in particolare non si ha modo di codificare un messaggio in una stringa di bit, dal momento che per farlo servirebbero almeno due bottoni. C'è di più: il fatto che lo stato delle lampadine sia sempre uguale fra loro, e quindi perfettamente correlato, non implica che esista uno scambio di informazione fra i due terminali (informazione che comunque non sarebbe accessibile ad Alice e Bob e pertanto non ne permetterebbe la comunicazione). Ogni terminale può infatti essere pensato come un lettore locale di una memoria locale pre-caricata, con il requisito che le memorie dei due componenti siano uguali fra loro: i.e., il produttore quando ha costruito il *device* ha generato una stringa casuale lunghissima (così lunga da poter essere considerata infinita) di zeri e uno, e ne ha inserita una copia in ciascun terminale. Ad ogni pressione del bottone ciascun componente della macchina si limita a leggere un bit di informazione dalla stringa e procedere ad accendere o meno la lampadina a seconda del valore letto localmente (zero o uno). La stringa a questo punto scorre, in modo che alla lettura successiva i due *endpoint* leggano il carattere immediatamente successivo a quello letto allo *step* precedente. L'uguaglianza delle due memorie consente ad entrambi i terminali di visualizzare lo stesso stato della lampadina. Il fatto che lo stato della lampadina di un terminale sia funzione solamente del bottone premuto sulla macchina stessa qualifica il termine locale nell'espressione *lettore locale*. La parola locale riferita a memoria identifica invece il fatto che esistono due memorie, una per ogni terminale.

Alice e Bob non persuasi dalla prima alternativa passano alla seconda proposta. In questo caso ogni terminale possiede due bottoni, e le regole di correlazione sono quelle riportate in tabella 1a, dove A e B specificano i pulsanti di Alice e Bob rispettivamente, e i numeri 0 e 1 identificano i due bottoni di ciascuno; a e b indicano invece lo stato di ciascuna lampadina: i.e., 1 accesa e 0 spenta. In linea di principio in questo caso ogni utente ad un capo della macchina può codificare un messaggio – inteso come una stringa di bit – sui due pulsanti. Le correlazioni della macchina garantiscono che quando Alice e Bob premono lo stesso bottone lo stato della lampadina è uguale per entrambi,¹⁰ ed opposta quando i bottoni premuti sono diversi. Dal momento però che non è possibile per nessuno dei due sapere istantaneamente lo stato della lampadina dall'altro lato, la

Lettore locale di una memoria locale

Device "locale" a due bottoni

¹⁰ I bottoni considerati *uguali*, sono quelli identificati dallo stesso numero: i.e., A = 0 e B = 0 sono lo stesso pulsante, e così anche A = 1 e B = 1.

macchina non può essere utilizzata per comunicare.¹¹ È interessante notare che anche in questo caso si può immaginare che i due terminali del dispositivo siano due lettori locali di memorie locali. In particolare per garantire che gli outcome siano opposti qualora i bottoni premuti siano differenti e mantenere le correlazioni della tabella 1a, basta generare casualmente una sequenza di bit abbastanza lunga in cui gli zeri e gli uno siano distribuiti con la stessa probabilità. Da questa sequenza, che chiameremo (a_n) , si genera poi la sequenza (\bar{a}_n) definita come il complemento a 1 di (a_n) . Le memorie dei dispositivi di Alice e di Bob saranno memorie a due registri costruite nel modo seguente:

$$\text{MEM}_A = \begin{bmatrix} (a_n) \\ (\bar{a}_n) \end{bmatrix} \qquad \text{MEM}_B = \begin{bmatrix} (a_n) \\ (\bar{a}_n) \end{bmatrix}$$

I due terminali alla pressione del proprio primo o secondo bottone leggeranno rispettivamente il proprio primo e secondo registro. Poiché i registri di ogni componente sono fra loro opposti, è garantito che lo stato delle lampadine è uguale se e solo se Alice e Bob premono lo stesso bottone.

Visto che nemmeno questo *device* riesce a garantire qualsiasi tipo di comunicazione istantanea Alice e Bob passano ad esaminare la terza proposta. Anche in questo caso ci sono due bottoni e le correlazioni sono quelle riportate nella tabella 1b. Ripetendo quanto esposto precedentemente si vede che per poter soddisfare le correlazioni dei casi $A = 0, B = 0, A = 0, B = 1$ e $A = 1, B = 0$, nel caso si vogliano usare delle memorie locali è necessario che queste siano uguali e pre-caricate con due registri anch'essi fra loro uguali. In questo modo però non si può conciliare il caso $A = 1, B = 1$. Non è pertanto possibile considerare tale macchina come un lettore locale di memorie locali. È però possibile caratterizzare il *device* in questo modo alternativo sempre basato su memorie locali a due registri. Vengono generate preventivamente due stringhe di bit molto lunghe (a_n) e (b_n) e inoltre viene creata (\bar{b}_n) come complemento a uno di (b_n) . Le due memorie sono quindi costruite nel modo seguente:

$$\text{MEM}_A = \begin{bmatrix} (a_n) \\ (b_n) \end{bmatrix} \qquad \text{MEM}_B = \begin{bmatrix} (a_n) \\ (\bar{b}_n) \end{bmatrix}$$

Ogni terminale a questo punto all'atto della lettura procede come segue: nei casi $A = 0, B = 0, A = 0, B = 1$ e $A = 1, B = 0$ ciascuno legge dal proprio primo registro, e nell'altro caso dal secondo. Risulta chiaro che ciascun terminale per poter funzionare deve conoscere qual'è il bottone premuto sull'altro *endpoint*. In questo senso la macchina può essere pensata come *lettura non-locale di memoria locale*, dove l'espressione *non-locale* si riferisce proprio al fatto che all'atto della lettura è necessario sapere qualcosa circa l'altro terminale. Nonostante la presenza di quella che qualcuno chiamerebbe una *fantomatica azione a distanza* non si può inferire che la macchina permetta comunicazione: infatti lo stato della lampadina di ogni terminale non è influenzato dal fatto che la persona dall'altro capo abbia scelto un bottone piuttosto che l'altro. Questa indipendenza è espressa dalle seguenti uguaglianze che in questo esperimento pensato costituiscono un requisito sufficiente affinché non ci sia comunicazione fra i due capi:

$$\sum_b \Pr[a, b | A, B = 0] = \sum_b \Pr[a, b | A, B = 1] = \Pr[a | A]$$

$$\sum_a \Pr[a, b | A = 0, B] = \sum_a \Pr[a, b | A = 1, B] = \Pr[b | B]$$

¹¹ Per sapere che bottone ha premuto l'altro bisogna conoscere lo stato della sua lampadina, ma per fare questo vuol dire che esiste un altro mezzo di comunicazione non costituito dalla macchina proposta che si occupa di trasferire tale messaggio, e pertanto proprio questo secondo dispositivo si sobbarcherebbe il compito del trasferimento dell'informazione, rendendo questo *device* in ultima analisi inutile.

Device "non-locale" a due bottoni

Lettore non-locale di memoria locale

Non-località Vs comunicazione super-luminale

Alla luce dell'esempio si possono trarre le seguenti considerazioni:

- A. il funzionamento dei dispositivi di Alice e Bob può essere simulato come letture da memorie locali. Tali memorie locali fungono da variabili nascoste per i dispositivi: il risultato dell'esperimento (lo stato delle lampadine in seguito alla pressione dei bottoni) è dovuto in ultima istanza dalla stringa memorizzata. Il modello è pertanto realista, dal momento che il risultato dell'esperimento è la lettura di un valore preesistente, quello della variabile nascosta.
- B. la descrizione realista tramite memorie locali dei vari dispositivi presentati è deterministica: il valore del singolo bit di ciascuna stringa determina necessariamente lo stato della rispettiva lampadina; la aleatorietà del fenomeno osservato da Alice e Bob si spiega con la distribuzione stocastica dei bit all'interno di ogni stringa;
- C. la non-località non implica comunicazione super-luminale;
- D. nell'interpretazione della nozione di realismo tramite l'utilizzo di memorie locali, l'espressione onnipresente in letteratura *realismo locale*, identifica un modello in cui i risultati delle misure su di un sistema sono determinati dalla lettura della memoria locale abbinata a quel sistema, e tale lettura non dipende dalle letture fatte su altri sistemi. Un realismo non-locale prescrive una lettura su memorie locali, in cui tale lettura è condizionata dalle letture di altri sistemi (come nel terzo *device* dell'esempio, in cui il registro dal quale bisogna leggere è determinato dalla scelta di entrambi gli sperimentatori).

Come si traduce matematicamente l'assunzione di realismo? Come esposto tale concetto può essere interpretato come la presenza di una memoria locale in ogni sottosistema, e il processo di misurazione come una particolare lettura su tale memoria. La presenza di tale memoria non accessibile direttamente costituisce quello che in fisica viene considerata una variabile nascosta λ . In questi termini parlare di realismo o di modelli a variabili nascoste è la stessa cosa. Qualcuno potrebbe obiettare che in un modello a variabili nascoste quando si assegna uno stato multipartito si assegna una sola distribuzione di probabilità sulle λ , e non una distribuzione di probabilità delle λ per ogni sottosistema: in quest'ottica in una teoria a variabili nascoste non si avrebbe una memoria locale per ogni sottosistema, ma una sola memoria per lo stato nel suo complesso. È però necessario osservare che una singola memoria a n registri per un sistema costituito da m sottosistemi, può essere vista come una singola memoria locale per ogni sottosistema costituita $m \times n$ registri, in cui ogni sottosistema legge su un solo sottogruppo di n registri.

Alla luce di quanto detto finora verrà data la seguente definizione definitiva:

Definizione. *Una teoria è detta realista tout court se ammette un'interpretazione a variabili nascoste.*

1.3 IL PROGRAMMA A VARIABILI NASCOSTE

Riassumendo, cos'è l'interpretazione a variabili nascoste della meccanica quantistica, e qual'è il suo scopo? Essa nasce dal tentativo di inquadrare la teoria quantistica in un quadro di lavoro più ampio in grado di spiegare le sue caratteristiche esotiche tramite proprietà intuitive di una teoria più estesa. L'idea fondante del programma è credere che le teorie quantistiche non siano complete: non siano cioè in grado di descrivere tutti i possibili gradi di libertà del mondo fisico e che da questa loro incompletezza nascano quelle che sono le proprietà più peculiari e distintive di tali teorie; una su tutte la natura intrinsecamente probabilistica del processo di misura.

Le variabili nascoste vorrebbero servire anche a superare un'altra caratteristica peculiare della meccanica quantistica: la non-località dovuta alla presenza di stati *entangled*. Pur non consentendo comunicazione super-luminale la non-località va contro un altro senso comune mutuato dalla fisica classica: l'impossibilità per sistemi spazialmente separati e indipendenti di *influenzarsi* istantaneamente. La speranza è riuscire a introdurre una descrizione a variabili nascoste locale, in grado di simulare la non-località quantistica ad un livello descrittivo più grossolano.

Sebbene il fine ultimo del programma sia cercare a simulare la meccanica quantistica tramite un modello deterministico e locale fondato su una visione realista del mondo, non è detto sia possibile riuscire a raggiungere tutte queste aspettative contemporaneamente. Nel corso del XX secolo sono stati sviluppati alcuni teoremi che hanno posto alcuni paletti a questo tentativo, uno su tutti il teorema di Bell, che ha mostrato l'incompatibilità della meccanica quantistica con una visione localmente realista del mondo.

1.4 L'APPROCCIO OPERAZIONALE

Nel XX secolo P. W. Bridgman, premio nobel per la fisica nel 1946, gettò le basi per un nuovo approccio all'attività scientifica: l'operazionalismo (o analogamente operazionismo). Secondo tale dottrina il significato di un concetto scientifico consiste solamente nella determinata serie di operazioni eseguite per la sua definizione. In questo modo si eliminerebbe dalla scienza ogni riferimento alla metafisica e a tutte le definizioni puramente verbali o così generiche da perdere ogni reale significato dal punto di vista scientifico.

[...] what do we mean by the length of an object? We evidently know what we mean by length if we can tell what the length of any and every object is, and for the physicist nothing more is required. To find the length of an object, we have to perform certain physical operations. The concept of length is therefore fixed when the operations by which length is measured are fixed: that is, the concept of length involves as much as and nothing more than the set of operations by which length is determined. In general, we mean by any concept nothing more than a set of operations; the concept is synonymous with the corresponding set of operations. If the concept is physical, as of length, the operations are actual physical operations, namely, those by which length is measured; or if the concept is mental, as of mathematical continuity, the operations are mental operations, namely those by which we determine whether a given aggregate of magnitudes is continuous.¹²

Poiché le operazioni relative alle misurazioni sono sempre relative alle condizioni fisiche del momento, si dovrà necessariamente concludere che ogni concetto che pretenda di avere valore assoluto va eliminato da un discorso che pretenda di essere scientifico. In fondo un concetto non è altro che sinonimo della serie di operazioni empiriche che ha portato alla sua definizione.

Sebbene l'approccio operativo nel corso degli anni sia stato criticato,¹³ esso ha il vantaggio di fornire una visione estremamente empirica della scienza, epurata da ragionamenti astratti, e per la quale la base sperimentale viene ancor più valorizzata.

Il contributo della visione operazionalista

¹² Bridgman, P. W., *The Logic of Modern Physics*, MacMillan Edition, 1927.

¹³ Nel corso del XX secolo si è cercato di estendere l'approccio operativo anche ad altri ambiti scientifici che non fossero la fisica. Attualmente però si dubita della liceità di tale estensione. Altro aspetto contestato all'operazionismo in generale è la sua incapacità di accettare che la scienza progredisca sulla base di dubbi e ipotesi che al momento della formulazione non hanno alcun valore empirico sperimentabile. Se da un lato tale critica è vera, dall'altro si può ribattere che l'operazionismo non vuole spiegare l'evoluzione della scienza, bensì lo stato dell'approccio scientifico ad un dato momento storico fissato.

Sulla base di questa visione è nato un nuovo modo di caratterizzare le teorie scientifiche, in cui il credo operativo che identifica la scienza con l'esperimento, viene tradotto in un nuovo linguaggio in grado di descrivere esperimenti. Dal momento che secondo l'approccio operativo la scienza può formulare asserzioni solamente sugli esperimenti, le teorie operative costituirebbero per definizione la descrizione più completa possibile del mondo che ci circonda.

1.5 LE FONDAMENTA DELLA MECCANICA QUANTISTICA

La meccanica quantistica è una teoria con un solido fondamento matematico, con però lo svantaggio di basarsi su di un framework di lavoro estremamente astratto – spazi di Hilbert e operatori autoaggiunti – e lontano da un immediato riscontro fisico intuitivo. L'approccio è senza dubbio funzionale, dimostrato dal fatto che le previsioni quantistiche hanno una corrispondenza sperimentale pressoché perfetta, però non può essere ritenuto soddisfacente a livello di interpretazione. Un'assiomatizzazione convincente delle teorie quantistiche dovrebbe postulare dei concetti fisici, in grado di poter esser poi tradotti in un linguaggio matematico; in tal caso il formalismo degli spazi di Hilbert, degli operatori autoaggiunti, etc., dovrebbe sorgere dall'aver imposto prerequisiti prettamente fisici.

*La necessità di un nuova
assiomatizzazione della
meccanica quantistica*

La necessità di una rivisitazione dei fondamenti della meccanica quantistica è chiaro fin dalla nascita di questa disciplina, e nel corso del XX secolo ha ottenuto tanti contributi che hanno portato ad una migliore comprensione dei principi fisici che regolano il funzionamento del formalismo matematico introdotto, contributi spesso nati per cercare di dare una risposta al cosiddetto *problema della misura*. L'interpretazione a variabili nascoste è senz'altro uno di questi. L'avvento sulla scena scientifica della *quantum information* ha contribuito con nuovi spunti a questo tentativo di rifondazione della meccanica quantistica, e ha fatto nascere l'idea della possibilità di poterla fondare su principi prettamente informativi. Un altro contributo della branca dell'informazione quantistica è stato il sottolineare l'importanza dei sistemi finito-dimensionali: essi posseggono tutte le peculiarità quantistiche e garantiscono una più semplice trattazione matematica.

*L'assiomatizzazione
operazionale*

Negli anni ottanta del secolo scorso è stato inoltre proposto da G. Ludwig un tentativo di assiomatizzazione della meccanica quantistica tramite concetti puramente operazionali, sull'onda del pensiero operazionista di P. W. Bridgman. Da allora sono stati fatti passi avanti fino a giungere ad una caratterizzazione della meccanica quantistica finito-dimensionale tramite teorie operative e principi di semplice intuizione fisica di natura prettamente informativa. [10] Tale assiomatizzazione porta a concludere che la meccanica quantistica può essere vista come una particolare teoria all'interno del grande contenitore delle cosiddette *teorie operative*.¹⁴

Oltre la meccanica quantistica

Quest'ultime costituiscono un linguaggio tramite il quale descrivere esperimenti, e grazie al quale è possibile fare previsioni su esperimenti futuri – la scienza oltre che descrizione è infatti anche previsione.¹⁵ Tali previsioni possono essere fondamentalmente di due tipi: di natura probabilistica o deterministica. I modelli operazionali probabilistici costituiscono però un framework di lavoro più generale rispetto a quelli deterministici, dal momento che è possibile recuperare quest'ultimi nel linguaggio dei primi imponendo che le probabilità in gioco siano tutte o zero o uno. Pertanto in un approccio operativo i modelli probabilistici costituiscono un approccio dalle richieste meno stringenti.

*Le teorie operative come
estensione*

Deve essere chiaro che lo studio delle teorie operative non è importante solamente per la ricerca di un fondamento alternativo alla teoria quantistica. Come si sa il formalismo quantistico è in contrasto con le moderne teorie di gravitazione, e l'approccio riduzionista

¹⁴ Sulla assiomatizzazione operativa/informativa della meccanica quantistica si rimanda a [10].

¹⁵ Per un'approfondita introduzione al linguaggio operativo si rimanda anche al capitolo 5 di [3].

tipico della fisica non è ancora stato soddisfatto da una soddisfacente unificazione di tali modelli. Non si può escludere che una possibile futura sintesi non sia basata sull'approccio operativo, considerato soprattutto il fatto che proprio una delle due teorie in questione è una teoria operativa. Pertanto lo studio dei modelli operativi non è fine a se stesso.

1.6 SCOPO E CONTENUTO DELLA TESI

Se da un lato i cosiddetti teoremi no-go del XX secolo delimitano l'ambito di applicabilità dell'argomento a variabili nascoste per la meccanica quantistica, dall'altro una volta inquadrata la teoria quantistica nel grande insieme delle teorie operative non esiste alcuna risultato analogo su questo nuovo versante. Più precisamente non esiste alcun risultato che indichi quali caratteristiche deve possedere un modello operativo affinché questo non possa presentare opportune interpretazioni a variabili nascoste. Nel seguito pertanto si cercherà di muovere qualche piccolo passo in tale direzione: è possibile individuare quali caratteristiche una teoria operativa deve possedere affinché una sua interpretazione a variabili nascoste goda di alcune proprietà significative? Tali caratteristiche significative non sono altro che le proprietà che l'iniziale programma a variabili nascoste cercava di recuperare e che invece la meccanica quantistica aveva buttato al macero: si parla della località e del determinismo.

Località, determinismo e realismo per le teorie operative

Il titolo della tesi fa esplicitamente riferimento a teorie probabilistiche, ma nel seguito l'attenzione sarà concentrata esclusivamente sulle sole teorie operative di natura probabilistica; perché? Semplicemente perché si crede che una qualunque caratterizzazione empiricamente significativa di una teoria probabilistica debba essere fondata sull'approccio operativo e pertanto su concetti che siano identificabili perfettamente con operazioni di laboratorio. Si potrebbe ribattere che far proprio l'approccio operativo è in contraddizione con la ricerca di una sua equivalente interpretazione a variabili nascoste, dal momento che le variabili nascoste sono per definizione non riscontrabili, ergo non operative. Tale critica dimostra un'imprecisione di fondo: le variabili nascoste vengono così chiamate non perché non sono osservabili, bensì perché sono nascoste rispetto al formalismo quantistico. Non si può infatti escludere che l'attuale incapacità sperimentale nel riscontrare tali quantità sia solamente dovuta alla mancanza di competenze tecniche nelle misurazioni: e.g., sensibilità degli strumenti non sufficiente ad apprezzare tali quantità. L'approccio operativo non è infatti in contraddizione con una descrizione a variabili nascoste. Nell'ipotesi che tale descrizione sia corretta, e nell'eventualità che in un futuro si sia in grado di manipolare operativamente tali quantità, basterà introdurre nella teoria operativa un oggetto in grado di descrivere le operazioni che portano alla definizione di tali oggetti, e si congettura che tale implementazione potrà essere effettuata in modo molto semplice ridefinendo quello che verrà chiamato cono degli stati.

L'apparente contraddizione tra l'approccio operativo e la visione realista

Il lavoro sarà pertanto organizzato nel modo seguente:

- * il capitolo 2, introdurrà le teorie probabilistiche operative. Non conterrà tutti i risultati inerenti tali modelli, bensì solamente i concetti necessari agli sviluppi dei capitoli successivi. Per un compendio complessivo di tutti i risultati attualmente disponibili inerenti l'approccio operativo si rimanda a [10, 11], e in particolare a [10] per capire come ricavare la meccanica quantistica da una teoria operativa;
- * il capitolo 3 presenta il formalismo di A. Brandenburger e N. Yanofsky per la trattazione di generiche teorie probabilistiche. Dopo aver introdotto tale framework si proverà a ricavare dei risultati per le teorie operative analoghi ai più blasonati teoremi no-go della meccanica quantistica;

* il capitolo 4 presenterà un recente teorema no-go quantistico chiamato *teorema del free will*, il quale ha ricevuto molte attenzioni dalla critica recente, specialmente in tono negativo. Il capitolo proverà a chiudere le accese diatribe presenti in letteratura, sfruttando il formalismo introdotto nel capitolo 3. Inizialmente tutto il lavoro di tesi era rivolto verso il teorema del free will: è possibile una sua generalizzazione al caso operativo? Come verrà però accennato la difficoltà nel trovare un analogo operativo del teorema di Kochen-Specker ha dirottato le attenzioni su altri teoremi no-go.

2

TEORIE PROBABILISTICHE OPERAZIONALI

2.1	Test e sistemi	15
2.1.1	Composizione sequenziale	18
2.1.2	Composizione parallela	19
2.2	Teorie probabilistiche operazionali	20
2.2.1	Preparazioni e osservazioni	21
2.2.2	Coarse-graining e raffinamento di test	24
2.3	Il principio di no-signaling	25
2.3.1	Caratterizzazioni alternative di teorie operazionali causali	27
2.3.2	Test condizionati	30
2.3.3	No-signaling senza interazione	32
2.3.4	La non-causalità	33
2.4	Discriminabilità locale	34
2.5	Purificazione	36

DOPO un'introduzione generale del linguaggio operativo in questo capitolo si tratteranno le teorie operazionali di tipo probabilistico. In particolare l'attenzione sarà rivolta alle sole teorie operazionali probabilistiche che soddisfano una particolare condizione di causalità, che altro non è che un principio di *no-signaling*. Come accennato nell'introduzione, dal formalismo operativo è possibile ricavare l'usuale meccanica quantistica, e per dettagli si rimanda a [10]. Quanto esposto nel capitolo che segue non può essere considerato esaustivo del tema delle teorie operazionali, dal momento che ci si limiterà all'introduzione dei concetti necessari per gli sviluppi dei capitoli successivi. I risultati qui mostrati sono totalmente riscontrabili in letteratura, in particolare in [10, 11].

2.1 TEST E SISTEMI

Come accennato precedentemente l'approccio operativo cerca di formalizzare nel modo più preciso possibile il concetto di esperimento di una teoria scientifica. Secondo quest'ottica l'esperimento è costituito da tre componenti principali: la *preparazione* da parte dello sperimentatore di uno stato, la *trasformazione* di tale stato in un nuovo stato, e la *misura* di una certa grandezza. Questi tre ingredienti possono essere riassunti complessivamente all'interno di un grande contenitore concettuale che costituisce l'ingrediente fondamentale della teoria operativa: il *test*.

Un test rappresenta operativamente l'utilizzo di un sistema fisico come un *beam splitter*, un magnete di Stern-Gerlach, un contatore di fotoni. L'utilizzo di uno strumento in generale restituisce un outcome i da un certo insieme η : e.g., ad esempio le cifre su di un misuratore digitale o un puntino su di uno schermo. La visualizzazione di uno specifico outcome da parte di uno strumento è collegato al fatto che è avvenuto un determinato evento all'interno del device.

Accanto al concetto di test c'è il quello di *sistema*. I sistemi sono quegli oggetti che

identificano in che modo i test possono essere collegati fra loro: il fatto che in meccanica quantistica abbia senso misurare lo spin di un elettrone, mentre non ha alcun significato misurarne la polarizzazione viene tradotto in termini operazionali affermando che la misura dello spin e lo stato di elettrone (e.g., $|\downarrow\rangle$) sono test inerenti lo stesso sistema, mentre un fotone è uno stato di un altro sistema. I sistemi identificano pertanto alcune costrizioni su come è possibile collegare i test.

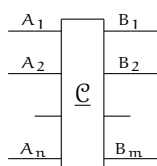
Queste nozioni intuitive possono essere formalizzate nel modo seguente.

Definizione 2.1 (Test [11]). Un test $\underline{\mathcal{C}}$ con sistema in input A e sistema di output B è una collezione di possibili eventi \mathcal{C}_i etichettati dagli outcome i di un certo spazio finito di outcome η . Pittoricamente è rappresentato nel modo seguente:

$$\underline{\mathcal{C}} \doteq \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \eta} \doteq \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ | \\ \boxed{\underline{\mathcal{C}}} \\ | \\ \text{---} B \text{---} \end{array}$$

L'insieme di tutti i test che hanno come input il sistema A e come output il sistema B verrà identificato tramite il simbolo $\mathfrak{T}(A, B)$.

In generale è possibile che i test in input o in output siano più di uno, nel qual caso si adotterà la seguente notazione:



L'algebra booleana degli eventi

I test sono sempre da considerare completi: i.e., l'esecuzione del test $\underline{\mathcal{C}} \doteq \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \eta}$ non può dare altri *eventi* che non siano i \mathcal{C}_i , o una loro opportuna unione. In generale è necessario considerare più che l'esecuzione di un test, l'avvenimento di un evento. Dato un test $\underline{\mathcal{C}} \doteq \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \eta}$, eventi sono i \mathcal{C}_i e tutte le loro unioni: $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_j$ costituito dai sotto-eventi \mathcal{C}_i e \mathcal{C}_j (con $i \neq j$ e $i, j \in \eta$) è l'evento che avviene quando si verifica o \mathcal{C}_i o \mathcal{C}_j .¹ L'avvenimento di $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_j$ non permette di inferire nulla sull'avvenimento dei suoi sotto-eventi \mathcal{C}_i che \mathcal{C}_j . Gli eventi oltre ad essere chiusi per unione, lo sono anche per intersezione e complemento; costituiscono pertanto un'algebra booleana. Come si vedrà tale struttura consente che, partendo da un test, sia sempre possibile costruirne altri i cui eventi costituenti sono generati unendo eventi opportuno del test di partenza.

Notazione

Tale considerazione giustifica la notazione che verrà utilizzata in seguito: dato un test $\underline{\mathcal{A}} \doteq \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \eta}$, con il termine evento ci si riferirà indistintamente sia agli \mathcal{A}_i che ad una loro arbitraria unione. In particolare, il simbolo $\underline{\mathcal{C}}$ identificherà il test nel suo complesso, \mathcal{C}_i i singoli eventi che intervengono nella sua definizione, \mathcal{C} un evento generico costituito dall'unione di vari \mathcal{C}_i . L'evento generato dall'unione di tutti i \mathcal{C}_i verrà denotato con $\widehat{\mathcal{C}}$: i.e., $\widehat{\mathcal{C}} \doteq \cup_{i \in \eta} \mathcal{C}_i$. In generale anche per gli eventi vale una rappresentazione pittorica come le precedenti: e.g., un evento \mathcal{C} è rappresentato nel modo seguente:

$$\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ | \\ \boxed{\mathcal{C}} \\ | \\ \text{---} B \text{---} \end{array}$$

I test deterministici

È utile fin da subito introdurre il concetto di *test deterministico*, ossia un test il cui spazio degli outcome ha cardinalità 1. Quando sperimentalmente viene utilizzato uno strumento rappresentato da un test deterministico, lo sperimentatore è sicuro che solamente un evento potrà aver luogo. Si dia pertanto la seguente definizione:

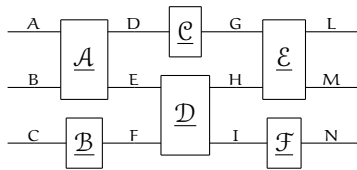
¹ Non è dato il caso in cui capitino sia \mathcal{C}_i che \mathcal{C}_j , dato che sia \mathcal{C}_i che \mathcal{C}_j appartengono a $\underline{\mathcal{C}}$, e in un test gli eventi sono disgiunti gli uni dagli altri: i.e., quelli che in teoria della probabilità vengono chiamati eventi incompatibili, si noti però che in questo contesto non è ancora stata introdotta alcuna misura di probabilità.

Definizione 2.2 (Test deterministico [11]). *Un test $\underline{\mathcal{C}} \doteq \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \eta}$ è deterministico se e solo se $|\eta| = 1$.*

Nel caso di un test deterministico $\underline{\mathcal{C}}$ ci si riferirà indifferentemente al test o al suo unico evento con lo stesso simbolo: e.g., dato un test $\underline{\mathcal{C}}$, è possibile costruire tramite l'unione completa dei suoi eventi costituenti il test $\widehat{\underline{\mathcal{C}}}$ costituito dal solo evento $\widehat{\mathcal{C}}$; in questo caso ci si riferirà indifferentemente al test $\widehat{\underline{\mathcal{C}}}$ o al suo singolo evento costituente con lo stesso simbolo $\widehat{\mathcal{C}}$.

Ogni test non deve essere pensato come un'entità a se stante: come si vedrà la cosa veramente significativa è la possibilità di collegare i test fra di loro, in modo da costruire un cosiddetto *circuito operazionale*. Un esempio di circuito è il seguente:

I circuiti operazionali



dove varie lettere A, B, C, ..., N, identificano i sistemi. Si può notare come il sistema output di un test diviene l'input per un altro test: e.g., il test $\underline{\mathcal{D}}$ è un test che ha E ed F come sistemi di output, i test immediatamente successivi $\underline{\mathcal{E}}$, $\underline{\mathcal{F}}$ dovranno allora avere tali sistemi come input. Da questa osservazione discendono le seguenti regole di collegamento:

Regole di collegamento tra test

Definizione 2.3 (Regole di collegamento). *Valgono le seguenti regole di collegamento:*

- A. *si può connettere l'output di un test solamente con l'input di un altro test;*
- B. *si possono connettere solamente sistemi con lo stesso nome;*
- C. *sono proibiti loop: i.e., non è possibile connettere l'output di un test con uno dei propri input, anche se sono inerenti lo stesso sistema.*

Alla luce di ciò è quindi possibile porsi la seguente domanda: cosa sono i fili, e dunque i sistemi? In una teoria operativa sono semplicemente delle etichette in grado di identificare quali test possono connettersi fra loro. Se rispettando le regole di collegamento enunciate precedentemente due test sono connessi fra loro, allora è possibile affermare che l'avvenimento di un particolare evento per uno di essi dipende in generale dall'outcome avvenuto nell'altro. In quest'ottica i fili non rappresenterebbero altro che *relazioni di input-output* fra i test. Deve essere assolutamente chiaro che finora non si è introdotta una relazione temporale: il fatto che un test $\underline{\mathcal{A}}$ è collegato come input ad un test $\underline{\mathcal{B}}$ non implica che $\underline{\mathcal{A}}$ precede temporalmente $\underline{\mathcal{B}}$; vuol semplicemente dire che fra i due esiste una qualche connessione. I fili sono stati chiamati *sistemi* poiché in generale, come si vedrà, in un framework causale tali relazioni di input-output possono essere intese come connessioni causali, e nel linguaggio standard le influenze causali vengono propagate all'interno di quelli che comunemente in fisica vengono appunto chiamati sistemi. È importante inoltre sottolineare che i *fili* non rappresentano l'evoluzione libera: l'evoluzione unitaria della meccanica quantistica viene infatti rappresentata operazionalmente come un particolare test deterministico.

La richiesta che non siano ammessi *loop* nei collegamenti inerisce al requisito che ogni test può essere utilizzato una sola volta. Se in un esperimento un apparato è utilizzato n volte, il circuito operazionale rappresentante l'esperimento presenterà il rispettivo test n volte.

Tra tutti i possibili sistemi ce n'è uno particolare: il cosiddetto *sistema triviale*. Indicato con I, il sistema triviale indica un sistema in cui non c'è nulla. Tale definizione informale apparirà chiara nel seguito. Grazie a questo concetto è possibile definire due classi particolari di test: i *test preparativi* e quelli *osservativi*.

Il sistema triviale

I test preparativi

Definizione 2.4 (Test preparativo [11]). Un test preparativo per il sistema A è un test appartenente a $\mathfrak{T}(I, A)$. L'insieme di tutti i test preparativi per A viene indicato con $\mathfrak{S}(A)$.

Risulta quindi che $\mathfrak{S}(A) \equiv \mathfrak{T}(I, A)$. Un test preparativo è un test costituito da *eventi preparativi*, e identifica quello che nella teoria dell'informazione quantistica viene comunemente chiamata *sorgente random di stati quantistici*. Un test preparativo $\underline{\rho}$ verrà rappresentato pittoricamente in uno dei modi seguenti a seconda della convenienza:

$$\underline{\rho} \doteq \text{---} \boxed{\underline{\rho}} \text{---}^A \doteq \text{---} \boxed{\underline{\rho}} \text{---}^A$$

Analogamente l'evento i -esimo del test preparativo $\underline{\rho}$ verrà indicato nel modo seguente:

$$|\rho_i\rangle \doteq \text{---} \boxed{\rho_i} \text{---}^A \doteq \text{---} \boxed{\rho_i} \text{---}^A \quad \forall i \in \eta$$

dove la notazione *alla Dirac* serve a sottolineare l'analogia riscontrabile con gli stati della meccanica quantistica, che nel caso puro sono identificati con il simbolo di ket $|\rho_i\rangle$. Notazionalmente il test $\underline{\rho}$ verrà spesso indicato come $\underline{\rho} \doteq \{|\rho_i\rangle\}_{i \in \eta}$.

È analogamente possibile una definizione inversa alla precedente:

I test osservativi

Definizione 2.5 (Test osservativo [11]). Un test osservativo per il sistema A è un test appartenente a $\mathfrak{T}(A, I)$. L'insieme di tutti i test osservativi per A viene indicato con $\mathfrak{E}(A)$.

Anche in questo caso per riferirsi ad un test osservativo \underline{a} e ai suoi *eventi osservativi* si utilizzeranno rispettivamente le seguenti notazioni:

$$\underline{a} \doteq \text{---}^A \boxed{\underline{a}} \text{---} \doteq \text{---}^A \boxed{\underline{a}} \text{---} \quad (a_i| \doteq \text{---}^A \boxed{a_i} \text{---} \doteq \text{---}^A \boxed{a_i} \text{---} \quad \forall i \in \chi$$

dove ancora una volta la somiglianza della notazione con la meccanica quantistica è stata voluta per sottolineare un'analogia a livello concettuale: un test osservativo in meccanica quantistica è una misura quantistica alla quale è associata una *POVM*, che nel caso proiettivo può essere agevolmente caratterizzata per mezzo dei funzionali $\langle a_i|$. Per riferirsi al test \underline{a} e ai suoi eventi $\langle a_i|$ si scriverà spesso $\underline{a} \doteq \{\langle a_i|\}_{i \in \chi}$.

Si noti che in seguito per le preparazioni si useranno le lettere greche, per le osservazioni quelle latine minuscole, mentre per un test generico le lettere latine maiuscole calligrafiche.

2.1.1 Composizione sequenziale

Come accennato precedentemente i test devono essere considerati all'interno di un circuito operativo. Due test collegati in sequenza (o equivalentemente in cascata) costituiscono un nuovo test.

Definizione 2.6 (Composizione sequenziale di test [11]). Siano dati i test $\underline{A} \doteq \{A_i\}_{i \in \eta}$, $\underline{B} \doteq \{B_j\}_{j \in \chi}$, con $A_i \in \mathfrak{T}(A, B) \forall i \in \eta$, $B_j \in \mathfrak{T}(B, C) \forall j \in \chi$. Il test $\underline{B} \circ \underline{A}$, costituito dal test \underline{A} seguito da \underline{B} , è definito nel modo seguente:

$$\underline{B} \circ \underline{A} \doteq \{B_j \circ A_i\}_{(i,j) \in \eta \times \chi}$$

con $B_j \circ A_i \in \mathfrak{T}(A, C), \forall (i, j) \in \eta \times \chi$.

Inerentemente agli eventi la definizione precedente assume la seguente forma pittorica:

$$\text{---}^A \boxed{B_j \circ A_i} \text{---}^C \doteq \text{---}^A \boxed{A_i} \text{---}^B \boxed{B_j} \text{---}^C \quad \forall (i, j) \in \eta \times \chi$$

Si ricordi che la consequenzialità della composizione non è indice di un ordinamento temporale nell'esecuzione dei test.

La composizione sequenziale permette la definizione di un test particolare per ogni sistema: il *test identico*.

Definizione 2.7 (Test identico [11]). *Il test identico per un sistema A è un test deterministico J_A per il quale per ogni sistema B valgono le seguenti uguaglianze:* I test identici

$$\begin{aligned} \text{---}^A \boxed{J_A} \text{---}^A \boxed{A_i} \text{---}^B &= \text{---}^A \boxed{A_i} \text{---}^B & \forall A_i \in \mathfrak{T}(A, B) \\ \text{---}^B \boxed{B_j} \text{---}^A \boxed{J_A} \text{---}^A &= \text{---}^B \boxed{B_j} \text{---}^A & \forall B_j \in \mathfrak{T}(B, A) \end{aligned}$$

Informalmente è possibile affermare che l'esecuzione del test identico su di un sistema equivale a *non far nulla*: l'esecuzione di J_A su A non altera l'azione di altri test, e non fornisce alcuna informazione (dal momento che è deterministico).

Precedentemente si è affermato come il sistema di un elettrone, e il sistema di un fotone devono essere considerati differenti. È altresì vero che operazionalmente tali sistemi si comportano allo stesso modo: i.e., entrambi sono rappresentabili da un qubit. Questa analogia del comportamento operazionale sottende un'equivalenza fra i due sistemi citati: è possibile cioè passare da un sistema all'altro reversibilmente (per lo meno in principio). Per formalizzare tale concetto si dia la seguente definizione.

Equivalenza fra sistemi

Definizione 2.8 (Equivalenza operazionale fra sistemi [11]). *Due sistemi A, A' sono detti operazionalmente equivalenti (in simboli $A \simeq A'$) se esistono due test deterministici $J_{A,A'} \in \mathfrak{T}(A, A')$, $J_{A',A} \in \mathfrak{T}(A', A)$, tali che*

$$\begin{aligned} \text{---}^A \boxed{J_{A,A'}} \text{---}^{A'} \boxed{J_{A',A}} \text{---}^A &= \text{---}^A \boxed{J_A} \text{---}^A \\ \text{---}^{A'} \boxed{J_{A',A}} \text{---}^A \boxed{J_{A,A'}} \text{---}^{A'} &= \text{---}^{A'} \boxed{J_{A'}} \text{---}^{A'} \end{aligned}$$

Grazie alla definizione precedente dire che due test \underline{A} , \underline{A}' (appartenenti rispettivamente a $\mathfrak{T}(A, A)$, $\mathfrak{T}(A', A')$) sono equivalenti significa affermare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \text{---}^A \boxed{\underline{A}} \text{---}^A &= \text{---}^A \boxed{J_{A,A'}} \text{---}^{A'} \boxed{\underline{A}'} \text{---}^{A'} \boxed{J_{A',A}} \text{---}^A \\ \text{---}^{A'} \boxed{\underline{A}'} \text{---}^{A'} &= \text{---}^{A'} \boxed{J_{A',A}} \text{---}^A \boxed{\underline{A}} \text{---}^A \boxed{J_{A,A'}} \text{---}^{A'} \end{aligned}$$

2.1.2 Composizione parallela

Due sistemi A e B possono sempre essere considerati come un unico sistema composto, denotato con AB. La definizione di sistema composto prevede che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

I sistemi composti

- A. un sistema A composto con il sistema triviale (cioè con niente) è ancora il sistema A:

$$AI = IA = A$$

- B. il sistema composto è determinato solamente dai soli elementi; non è dipendente né dall'ordine con cui vengono specificati (a meno di un test deterministico che ne permuti i sistemi in gioco), né dal modo con cui vengono raggruppati:

$$AB \simeq BA$$

$$A(BC) = (AB)C \doteq ABC$$

Considerando i sistemi composti, è naturale proseguire definendo una composizione parallela per i test.

Definizione 2.9 (Composizione parallela di test [11]). *Siano dati i test $\underline{\mathcal{A}} \doteq \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \eta}$, $\underline{\mathcal{B}} \doteq \{\mathcal{B}_j\}_{j \in \chi}$, con $\mathcal{A}_i \in \mathfrak{T}(A, A') \forall i \in \eta$, $\mathcal{B}_j \in \mathfrak{T}(B, B') \forall j \in \chi$. Il test $\underline{\mathcal{A}} \otimes \underline{\mathcal{B}}$, costituito dalla composizione parallela dei test $\underline{\mathcal{A}}$ e $\underline{\mathcal{B}}$, è definito nel modo seguente:*

$$\underline{\mathcal{A}} \otimes \underline{\mathcal{B}} \doteq \{\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{B}_j\}_{(i,j) \in \eta \times \chi}$$

con $\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{B}_j \in \mathfrak{T}(AB, A'B') \forall (i, j) \in \eta \times \chi$.

Pittoricamente la definizione precedente equivale alla seguente:

$$\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ \boxed{\mathcal{A}_i} \\ \text{---} A' \text{---} \\ \text{---} B \text{---} \\ \boxed{\mathcal{B}_j} \\ \text{---} B' \text{---} \end{array} \doteq \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ \boxed{\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{B}_j} \\ \text{---} A' \text{---} \\ \text{---} B \text{---} \\ \boxed{\mathcal{B}_j} \\ \text{---} B' \text{---} \end{array} \quad \forall (i, j) \in \eta \times \chi$$

Considerando la composizione di test sia sequenziale che parallela si può notare che:

$$\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ \boxed{\mathcal{A}_i} \\ \text{---} A' \text{---} \\ \text{---} B \text{---} \\ \boxed{\mathcal{B}_j} \\ \text{---} B' \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ \boxed{\mathcal{A}_i} \\ \text{---} A' \text{---} \\ \text{---} B \text{---} \\ \boxed{\mathcal{J}_C} \\ \text{---} B \text{---} \\ \boxed{\mathcal{B}_j} \\ \text{---} B \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ \boxed{\mathcal{J}_A} \\ \text{---} A \text{---} \\ \boxed{\mathcal{A}_i} \\ \text{---} A' \text{---} \\ \text{---} B \text{---} \\ \boxed{\mathcal{B}_j} \\ \text{---} B' \text{---} \\ \boxed{\mathcal{J}_D} \\ \text{---} B' \text{---} \end{array} \quad (2.1)$$

dove i vari test sono definiti in modo da permetterne la composizione. Il risultato precedente mostra come test su sistemi differenti *commutino* fra loro.

Nel seguito i simboli \circ e \otimes verranno a volte omessi qualora non ci sia il rischio di confusione: il contesto renderà chiaro se la composizione dovrà essere assunta parallela o sequenziale. Analogamente verranno generalmente omessi i test identici per i vari sistemi.

2.2 TEORIE PROBABILISTICHE OPERAZIONALI

Grazie alle definizioni date precedentemente è ora possibile dare una definizione formale di *teoria operativa*.

Definizione 2.10 (Teoria operativa [11]). *Una teoria operativa è identificata da una collezione di sistemi, chiusa sotto composizione, e da una collezione di test, chiusi sotto composizione sequenziale e parallela.*

Una teoria operativa è sostanzialmente un linguaggio, le cui parole sono i circuiti operazionali. Grazie ad esso è possibile specificare esperimenti, o rappresentare esplicitamente quale outcome è stato misurato in un esperimento.

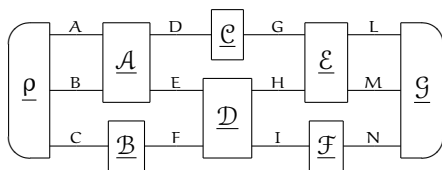
Una teoria fisica però richiede di più: vuole essere in grado di effettuare delle previsioni sull'avvenimento di determinati eventi. In generale non è necessario che queste previsioni siano deterministiche affinché la teoria sia soddisfacente: basta che il framework sia in grado di associare delle probabilità ai vari outcome.

Definizione 2.11 (Teoria probabilistica operativa). *Una teoria operativa è probabilistica se per ogni test dal sistema triviale I in se stesso è associata una misura di probabilità sugli outcomes.*

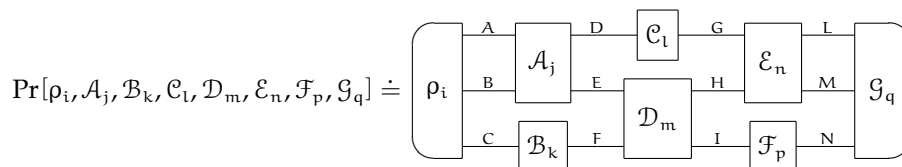
I circuiti chiusi come probabilità congiunte

Grazie alla proprietà di chiusura delle operazioni di composizione parallela e sequen-

ziale, il circuito seguente è un test appartenente a $\mathfrak{T}(I, I)$:²

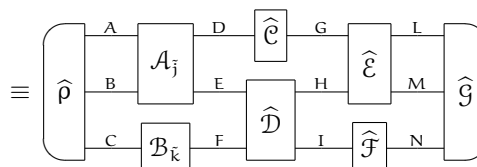


Una teoria probabilistica operativa è in grado di attribuire una probabilità ad ogni possibile outcome del test/circuito precedente, nonché ad un qualunque evento definibile a partire dagli outcome originari; è pertanto comodo identificare le probabilità congiunte di certi eventi con il circuito chiuso tramite il quale sono raffigurate:



Spesso si è interessati non tanto alle probabilità congiunte di tutti gli eventi, quanto alle *probabilità marginali* di avvenimento di un evento indipendentemente dall'accadimento di altri. Per fare questo basta sommare sui gradi di libertà dei test che non si vuole considerare, il che equivale a sostituire tali test con la rispettiva unione totale dei propri outcome costituenti: e.g., riferendosi al circuito scritto precedentemente, per valutare la probabilità che per il test \underline{A} accada l'outcome \mathcal{A}_j e per \underline{B} l'outcome \mathcal{B}_k basta svolgere la somma seguente:

$$\Pr[\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_k] \doteq \sum_{i,l,m,n,p,q} \Pr[\rho_i, \mathcal{A}_j, \mathcal{B}_k, \mathcal{C}_l, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_n, \mathcal{F}_p, \mathcal{G}_q] \equiv$$



Sfruttando le probabilità appena illustrate è possibile definire le *probabilità condizionate* in modo del tutto analogo al caso standard della teoria della probabilità.

Dal momento che in seguito si tratterà solamente di teorie operative probabilistiche, ci si riferirà ad esse evitando di specificare ogni volta la natura probabilistica del framework: i.e., l'espressione *teoria operativa* sarà da considerare equivalente a *teoria operativa probabilistica*.

2.2.1 Preparazioni e osservazioni

Due fili di un circuito verranno detti *contigui* se sono uno l'input e l'altro l'output di uno stesso test. Una sequenza di fili contigui a due a due costituiscono un *percorso di input-output* (vedi figura 2a). Due sistemi/fili sono detti *indipendenti* se non esiste alcun percorso di input-output al quale entrambi appartengono. Un insieme di sistemi a due a due indipendenti costituisce una *slice* per il circuito. Viene detta *slice globale* una slice in grado di tagliare un circuito in due come in figura 2b. Tramite le regole di composizione

Slice e slice globali

² I circuiti operazionali equivalenti ad una trasformazione appartenente a $\mathfrak{T}(I, I)$ verranno chiamati *circuiti chiusi*.

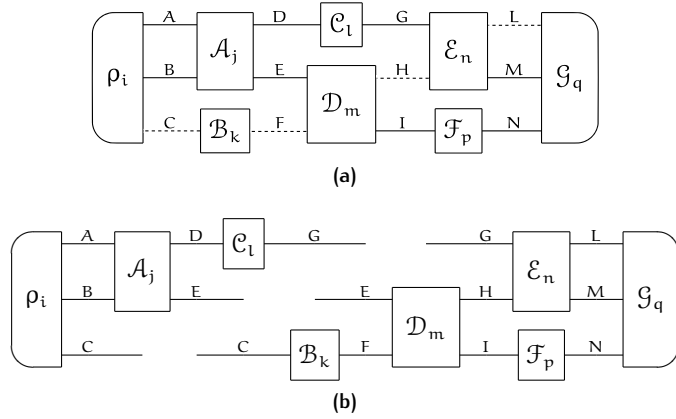


Figura 2.: La figura 2a mostra con una linea tratteggiata un percorso di input-output. La figura 2b mostra invece una slice globale.

illustrate in §§2.1.1-2.1.2 è possibile affermare che il circuito di tale figura è equivalente al circuito:

$$\boxed{\rho_i, \mathcal{A}_j, \mathcal{C}_l} \xrightarrow{\text{CEG}} \boxed{\mathcal{B}_k, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_n, \mathcal{F}_p, \mathcal{G}_q}$$

Per estensione si conclude che ogni circuito chiuso è una struttura del tipo (effetto | stato). Si consideri il seguente circuito:

$$\boxed{\rho_i} \xrightarrow{A} \boxed{\mathcal{A}_j} \xrightarrow{B} \boxed{a_k}$$

sfruttando il concetto di slice globale si possono fare le due identificazioni seguenti:

A. prendendo la slice seguente:

$$\boxed{\rho_i} \xrightarrow{A} \boxed{\mathcal{A}_j} \xrightarrow{B} \boxed{a_k}$$

si può pensare all'azione dell'evento \mathcal{A}_j come ad una trasformazione dell'evento preparativo $|\rho_i\rangle \in \mathfrak{S}(A)$ nell'evento preparativo $|\mathcal{A}_k \circ \rho_i\rangle \doteq |\mathcal{A}_k \circ \rho_i\rangle \in \mathfrak{S}(B)$;

B. considerando invece la slice:

$$\boxed{\rho_i} \xrightarrow{A} \boxed{\mathcal{A}_j} \xrightarrow{B} \boxed{a_k}$$

si può immaginare l'azione di \mathcal{A}_j come ad una trasformazione dell'evento osservativo $\langle a_k| \in \mathfrak{E}(B)$ nell'effetto osservativo $\langle a_k| \mathcal{A}_j \doteq \langle a_k| \circ \mathcal{A}_j \in \mathfrak{E}(A)$.

Pertanto, in maniera analoga a quanto consente il formalismo quantistico, si è portati a scrivere:

$$\langle a_k| \mathcal{A}_j | \rho_i \rangle \doteq \langle a_k| \mathcal{A}_j \circ \rho_i \rangle = \langle \mathcal{A}_j \circ a_k | \rho_i \rangle$$

Tutte le considerazioni precedenti permettono di andar oltre alla definizione 2.1 di test consentendo una definizione precisa di evento preparativo e di evento osservativo per una teoria probabilistica operativa.

Definizione 2.12 (Eventi preparativi ed osservativi [11]). *In una teoria probabilistica operativa un evento preparativo $|\rho_i\rangle$ per il sistema A è identificato da una funzione $\tilde{\rho}_i$ tale che:*

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_i : \mathfrak{E}(A) &\rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R} \\ (a_j | &\mapsto \tilde{\rho}_i((a_j |) \doteq (a_j | \rho_i)\end{aligned}$$

Analogamente un effetto osservativo $\langle a_j |$ per il sistema A è caratterizzato da una funzione $\tilde{\alpha}_j$ tale che:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_j : \mathfrak{S}(A) &\rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R} \\ |\rho_i\rangle &\mapsto \tilde{\alpha}_j(|\rho_i\rangle) \doteq \langle a_j | \rho_i)\end{aligned}$$

Una collezione di eventi preparativi (osservativi) tale da costituire un test, identifica un test preparativo (osservativo).

Operazionalmente due eventi preparativi sono indistinguibili se corrispondono alla medesima funzione (analogamente per quelli osservativi). Dal momento che dal punto di vista operativo gli unici oggetti che hanno importanza sono le probabilità — le uniche quantità sperimentalmente verificabili — si deduce che non ha senso considerare differenti due eventi preparativi (od osservativi) se sono identificati dalla stessa funzione, proprio perché operativamente non si è in grado di distinguerli. Ciò implica che gli eventi preparativi (od osservativi) devono essere considerati delle scatole, di cui lo sperimentatore non ne conosce l'implementazione interna, ma solo l'interfacciamento con altri sistemi (cioè le probabilità che generano connettendole in un circuito chiuso). Tutto questo porta alla prossima fondamentale definizione:

Stati ed effetti

Definizione 2.13 (Stati ed effetti [11]). *Classi di equivalenza di eventi preparativi (osservativi) per il sistema A fra loro operazionalmente indistinguibili sono chiamati stati (effetti) di A .*

Le funzioni $\tilde{\rho}_i$, $\tilde{\alpha}_j$ definite precedentemente costituiscono rispettivamente uno stato e un effetto. Per evitare di introdurre ulteriore simbologia si preferirà adottare il seguente abuso di notazione: il simbolo $|\rho_i\rangle$ che finora è stato utilizzato per identificare un evento preparativo proveniente dal test preparativo ρ , da ora identificherà lo stato caratterizzato dalla funzione ρ_i , di cui chiaramente l'evento preparativo $|\rho_i\rangle$ fa parte visto che è stato utilizzato per generare la classe di equivalenza. Una considerazione analoga vale anche per gli effetti, e per i simboli $\mathfrak{S}(A)$, $\mathfrak{E}(A)$ che ora identificheranno rispettivamente il set degli stati e degli effetti. In seguito verrà utilizzato il simbolo $\hat{\mathfrak{S}}(A)$ per identificare il set degli stati deterministici (o quelli che più comunemente vengono chiamati stati normalizzati).

Dal momento che gli stati (effetti) sono funzioni dagli effetti (stati) in probabilità, si può pensare di costruirne altri tramite combinazione lineare, dove la somma di due eventi corrisponde alla loro unione,³ mentre la moltiplicazione per uno scalare $0 < \lambda < 1$ è l'evento che da le stesse probabilità dell'evento di partenza riscalate di λ . È possibile pertanto definire lo spazio $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(A)$ ($\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(A)$) delle combinazioni lineari degli stati (effetti). Poiché in questa sede si tratteranno sempre *spazi finito-dimensionali*, e che per la definizione di stati (effetti) si ha che $\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(A)$ è il duale di $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(A)$ ($\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(A)$ è il duale di $\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(A)$), si conclude che:

$$\dim \mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(A) = \dim \mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(A)$$

In particolare le combinazioni lineari a coefficienti positivi di stati (effetti) costituisce il cono convesso degli stati $\mathfrak{S}_+(A)$ (cono convesso degli effetti $\mathfrak{E}_+(A)$). Se è vero che $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(A)$ e $\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(A)$ sono l'uno il duale dell'altro, altrettanto non può essere detto per $\mathfrak{S}_+(A)$ e $\mathfrak{E}_+(A)$. Sarebbe senz'altro corretto per una teoria nella quale tutti i funzionali di probabilità sugli stati e sugli effetti corrispondono rispettivamente a effetti e a stati.⁴

Il cono degli stati e il cono degli effetti

³ Per tale ragione si utilizzeranno indifferentemente i simboli di unione e di somma.

⁴ Tale proprietà è chiamata ipotesi di non restrizione. Per dettagli si veda [11].

Trasformazioni

Finora è stata data una definizione alternativa del concetto di stato ed effetto per una teoria operativa che sia anche probabilistica; nulla però si è detto su un'eventuale definizione per test generici. Precedentemente si è accennato al fatto che un evento $A \in \mathfrak{T}(A, B)$ di un test \mathcal{A} può essere equivalentemente considerato come una funzione da $\mathfrak{S}(A)$ in $\mathfrak{S}(B)$, o come un'applicazione da $\mathfrak{E}(B)$ in $\mathfrak{E}(A)$. Oltre a ciò ogni evento A in $\mathfrak{T}(A, B)$ induce una mappa \mathcal{A}_C da $\mathfrak{S}(AC)$ in $\mathfrak{S}(BC)$ per ogni sistema C , univocamente definita da:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_C : \mathfrak{S}(AC) &\rightarrow \mathfrak{S}(BC) \\ |\rho_i\rangle_{AC} &\mapsto \mathcal{A}_C(|\rho_i\rangle_{AC}) \doteq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{J}_C)|\rho_i\rangle_{AC} \end{aligned}$$

e analogamente per gli effetti. Se per ogni sistema C due eventi inducono la stessa mappa essi sono *probabilisticamente indistinguibili*. Tali considerazioni permettono di introdurre un concetto analogo a quelli di stato ed effetto.

Definizione 2.14 (Trasformazione [11]). *Classi di equivalenza di eventi indistinguibili da A a B sono detti trasformazioni da A a B . Una trasformazione $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(A, B)$ è definita univocamente dalla sua azione sugli stati:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_C^{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S}(AC) &\rightarrow \mathfrak{S}(BC) \\ |\rho\rangle_{AC} &\mapsto \mathcal{A}_C^{\mathfrak{S}}(|\rho\rangle_{AC}) \doteq (\mathcal{A} \circ \mathcal{J}_C)|\rho\rangle_{AC} \doteq |(\mathcal{A} \circ \mathcal{J}_C)\rho\rangle_{BC} \quad \forall C, \forall \rho \in \mathfrak{S}(AC) \end{aligned}$$

o equivalentemente sugli effetti:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_C^{\mathfrak{E}} : \mathfrak{E}(BC) &\rightarrow \mathfrak{E}(AC) \\ \langle a|_{BC} &\mapsto \mathcal{A}_C^{\mathfrak{E}}(\langle a|_{BC}) \doteq \langle a|_{BC}(\mathcal{A} \circ \mathcal{J}_C) \doteq \langle a|(\mathcal{A} \circ \mathcal{J}_C)|_{AC} \quad \forall C, \forall a \in \mathfrak{E}(BC) \end{aligned}$$

Si noti che in generale due trasformazioni $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ appartenenti a $\mathfrak{T}(A, B)$ potrebbero essere diverse anche se $\mathcal{A}|\rho\rangle_A = \mathcal{A}'|\rho\rangle_A \quad \forall |\rho\rangle \in \mathfrak{S}(A)$. Infatti se esiste un sistema ancillare C e uno stato congiunto per i sistemi AC per il quale:

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{J}_C)|\rho\rangle_{AC} \neq (\mathcal{A}' \circ \mathcal{J}_C)|\rho\rangle_{AC}$$

si ha per definizione che $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}'$. L'eventuale possibilità di tralasciare l'analisi sui sistemi ancillari è collegata alla proprietà di discriminabilità locale che verrà introdotta in seguito.

Come convenuto precedentemente per stati ed effetti, dal momento che d'ora in poi ci si riferirà sempre alle trasformazioni e non più agli eventi, si adotterà l'abuso di notazione che porta ad usare per le trasformazioni gli stessi simboli usati finora per gli eventi.

2.2.2 Coarse-graining e raffinamento di test

Come detto in precedenza un test è una collezione completa di eventi. Dato un test è possibile costruirne un altro i cui eventi sono opportuni raggruppamenti degli eventi del test di partenza. L'avvenimento di un evento di siffatto tipo corrisponderà al verificarsi di uno qualunque dei sotto-eventi costituenti, senza però poter sapere quale. I nuovi eventi rappresentano dunque una descrizione a *grana più grossa* rispetto a quelli di partenza. Alla luce di ciò si prosegue dando la seguente definizione:

Definizione 2.15 (Coarse-graining di un test [11]). *Un test $\underline{\mathcal{A}} \doteq \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \eta}$ è detto coarse-graining del test $\underline{\mathcal{B}} \doteq \{\mathcal{B}_j\}_{j \in \chi}$, se esiste una partizione di χ in set disgiunti χ_i tali che:*

$$\mathcal{A}_i = \bigcup_{j \in \eta_i} \mathcal{B}_j$$

Dal momento che la costruzione precedente è sempre possibile si deduce che $\mathfrak{T}(A, B)$ è chiuso sotto l'operazione di coarse-graining, per ogni sistema A e B .⁵

L'operazione inversa a quella di coarse-graining è chiamata *raffinamento*:

Raffinamento di test e di eventi

Definizione 2.16 (Raffinamento di un test [11]). *Un test $\underline{A} \doteq \{A_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ è detto raffinamento del test $\underline{B} \doteq \{B_j\}_{j \in \mathfrak{X}'}$, se \underline{B} è un coarse-graining di \underline{A} .*

Oltre a raffinare un test è possibile anche raffinare nello specifico un evento:

Definizione 2.17 (Raffinamento di un evento [11]). *Un raffinamento dell'evento $A \in \underline{A}$ è costituito da un test $\underline{B} \doteq \{B_j\}_{j \in \mathfrak{X}}$ e da un subset $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$, tali che $A = \bigcup_{j \in \mathfrak{X}_0} B_j$. Inoltre un evento B è detto che raffina un evento A , in simboli $B \preceq A$, se esiste un raffinamento $\{B_j\}_{j \in \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}}$ per il quale $B \in \{B_j\}_{j \in \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}}$.*

Un evento A ammette sempre un *raffinamento triviale*: è sempre infatti possibile scrivere A come unione di eventi B_j con $j \in \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$, tali che $B_j \doteq \lambda_j A$ con $\sum_{j \in \mathfrak{X}_0} \lambda_j = 1$. Tale raffinamento è però inutile: i vari B_j sono tutti uguali a A riscaldati in probabilità.

Un concetto utile collegato a quello di raffinamento è quello di *insieme di raffinamento* per un evento:

Definizione 2.18 (Set di raffinamento [11]). *Il set di raffinamento $\mathfrak{D}(\mathcal{C})$ di un evento $\mathcal{C} \in \mathfrak{T}(A, B)$ è l'insieme di tutti gli eventi \mathcal{D} che raffinano \mathcal{C} , cioè:*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{C}) \doteq \{\mathcal{D} \in \mathfrak{T}(A, B) \mid \mathcal{D} \preceq \mathcal{C}\}$$

Alla luce delle definizioni precedenti è possibile distinguere due categorie di eventi: gli *eventi raffinabili* e gli *eventi atomici*.

Definizione 2.19. *Un evento A è detto atomico se ammette solo raffinamenti triviali, cioè*

$$B \preceq A \implies B = \lambda A \quad \text{con } \lambda \in [0, 1]$$

Un evento è raffinabile se non è atomico.

Nello specifico ci si riferisce agli eventi preparativi atomici con il termine di *stato puro*, e di *stato misto* nel caso di stato raffinabile. In una teoria convessa uno stato è puro se e solo se è un punto estemale del set convesso $\mathfrak{S}(A)$. Inoltre nel caso convesso il set di raffinamento $\mathfrak{D}(|\rho\rangle_A)$, con $|\rho\rangle_A \in \mathfrak{S}(A)$, è un sub-set convesso di $\mathfrak{S}(A)$: nello specifico è il set il cui span è esattamente la faccia del cono a cui $|\rho\rangle_A$ appartiene. In particolare se lo stato $|\rho\rangle_A$ è interno al cono, lo span di $\mathfrak{D}(|\rho\rangle_A)$ coincide con tutto $\mathfrak{S}_R(A)$:

Stati puri e stati misti

$$\text{Span } \mathfrak{D}(|\rho\rangle_A) = \mathfrak{S}_R(A)$$

2.3 IL PRINCIPIO DI NO-SIGNALING

Come è risaputo alla luce della teoria della relatività speciale la possibilità di trasferimento di informazione o di corpi materiali ad una velocità superiore a quella della luce può portare ad inconsistenze causali come quella costituita dal cosiddetto *paradosso di Tolman* (si veda il box alla pagina successiva per informazioni [34]). Nonostante la relatività sia consistente con velocità superiori a c si preferisce imporre a livello di principi che la velocità della luce non possa essere superata da qualunque effetto propagativo di materia o di informazione proprio per evitare che in qualche sistema di riferimento inerziale sia possibile vedere gli effetti precedere le cause, o, detto in altre parole, che in alcuni sistemi

⁵ La chiusura vale anche per il sistema I , e quindi vale anche per $\mathfrak{S}(A)$ e $\mathfrak{E}(A)$, per ogni A .

IL PARADOSSO DI TOLMAN

Si considerino due punti A e B sull'asse x di un sistema di riferimento inerziale S. Si supponga che un qualche impulso si origini nel punto A, si propaghi verso B con velocità u e in B produca un qualche fenomeno osservabile. Esiste perciò per definizione una connessione di causa ed effetto tra l'impulso originatosi in A e l'effetto prodotto in B. L'intervallo di tempo tra la causa e il proprio effetto può essere misurata, e nel sistema S assume la forma:

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{x_B - x_A}{u}$$

dove x_A e x_B sono rispettivamente le coordinate dei punti A e B.

Si consideri adesso un altro sistema di riferimento inerziale S' , che si muove con velocità V rispetto a S. In S' il tempo intercorso tra la causa e l'effetto vale

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(t_B - \frac{V}{c^2} x_B \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(t_A - \frac{V}{c^2} x_A \right)$$

Confrontando con l'equazione dell'intervallo di tempo nel sistema S si ottiene che

$$\Delta t' = \frac{1 - \frac{uV}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t$$

Se si suppone che le velocità in gioco (u e V) non siano limitate, ed in particolare che l'impulso che viaggia da A a B possa propagarsi ad una velocità superiore a c , risulta evidente che si è in grado rendere $\frac{uV}{c^2}$ grande a piacere, ed in particolare maggiore di 1. Ma in questo caso $\Delta t'$ diverrebbe negativo: per un osservatore nel sistema di riferimento S' l'effetto prodotto in B avverrebbe prima della sua causa in A. Ciò non è logicamente impossibile, e infatti la teoria della relatività ristretta è consistente con velocità di propagazione superiori a c . Vista però la controintuitività di tale fenomeno si preferisce escludere tale possibilità a livello dei principi, postulando l'impossibilità di propagazione di informazione (o materia) a velocità superiori a c .

di riferimento inerziali sia presente una *comunicazione dal futuro*. Questa richiesta si fonda sulla speranza di voler salvare quello è oramai un consolidato principio di causalità: se è vero che un evento A è causa di evento B allora A deve precedere B, per un qualunque sistema di riferimento inerziale. Nonostante, come è stato accennato nell'introduzione, il problema di un fondamento del principio di causalità è tutt'ora lontano da una risoluzione, è utile introdurre nel framework operativo tale concetto, nella forma del postulato dell'esistenza di una velocità limite, che si traduce nell'impossibilità di comunicazione dal futuro (il cosiddetto *principio di no-signaling dal futuro*).

La causalità nelle teorie
operazionali

Definizione 2.20 (Causalità (1) [11]). Una teoria operativa è detta *causale* se:

$$\sum_{j \in X} (a_j | \rho_i)_A = \sum_{j \in Z} (b_j | \rho_i)_A$$

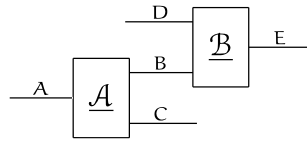
per ogni test preparativo $\underline{\rho}_A \doteq \{(\rho_i)_A\}_{i \in \Pi} \subset \mathfrak{G}(A)$, per ogni coppia di test osservativi $\underline{a}_A \doteq \{(a_j|_A)\}_{j \in X} \subset \mathfrak{E}(A)$, $\underline{b}_A \doteq \{(b_j|_A)\}_{j \in Z} \subset \mathfrak{E}(A)$, e per ogni sistema A.

La condizione di causalità formulata precedentemente richiede che le probabilità di ogni evento preparativo siano indipendenti dai test osservativi che sono collegati come output.

È possibile riformulare la condizione precedente per test tra sistemi genericamente non triviali.

Definizione 2.21 (Causalità (2)). *Una teoria operativa è causale, se:*

- A. per ogni sistema A, B, C, D, E , eventualmente composti;
- B. per ogni coppia di test $\underline{A} \doteq \{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \mathfrak{T}(A, BC)$, $\underline{B} \doteq \{B_j\}_{j \in \mathcal{X}} \subset \mathfrak{T}(BD, E)$ collegati come nella figura seguente:



- c. per ogni test preparativo su AD , e ogni test osservativo su CE ;

si ha la seguente asimmetria nella marginalizzazione delle probabilità degli eventi congiunti:

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} \Pr[A_i, B_j] = \Pr[A_i]$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \Pr[A_i, B_j] = \Pr[B_j, \underline{A}]$$

In altre parole il marginale su \underline{B} è indipendente dalla scelta di \underline{B} , mentre il marginale su \underline{A} dipende in generale dalla scelta dello specifico test \underline{A} .

Le due definizioni di causalità si possono mostrare equivalenti, infatti vale il seguente risultato:

Lemma 2.1. *Le due definizioni di causalità 2.20 e 2.21 sono equivalenti.*

Dimostrazione. (1) \implies (2): si consideri il disegno riportato nella definizione 2.21, e si costruisca una slice globale che coinvolga i sistemi D, B, C . Ricordando che per le proprietà di composizione dei test la parte di sinistra può essere considerata una preparazione, e quella di destra un'osservazione si conclude immediatamente che vale la definizione 2.21.

(2) \implies (1): immediato visto che un test preparativo su A è un particolare test dal sistema nullo su A , e pertanto il caso (1) può essere visto come un caso particolare del (2).

□

2.3.1 Caratterizzazioni alternative di teorie operazionali causali

È possibile dare delle caratterizzazioni alternative alla proprietà di causalità per una teoria probabilistica operativa. Tali risultati permetteranno di portare alla luce alcune utili semplificazioni nella trattazione del caso causale.

Lemma 2.2 (Unicità dell'effetto deterministico [11]). *Una teoria è causale se e solo se per ogni sistema A l'effetto deterministico è unico.*

Unicità dell'effetto deterministico

Dimostrazione. \Rightarrow : Si supponga che $(e|_A$ e $(e'|_A$ siano due effetti deterministici per il sistema A . Essi pertanto costituiscono gli eventi di due test deterministici $\underline{e} \doteq \{(e|_A\}$, $\underline{e}' \doteq \{(e'|_A\}$. La condizione di causalità data nella definizione 2.20 mostra che per ogni stato $|\rho\rangle \in \mathfrak{S}(A)$ si ha che $(e|\rho) = (e'|\rho)$, e cioè che $(e| = (e'|$.

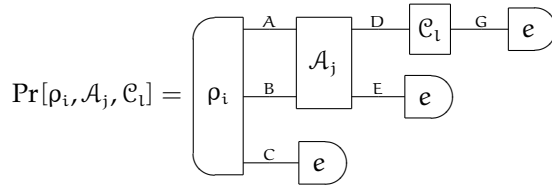
\Leftarrow : Si supponga che l'effetto deterministico sia unico, e si consideri un test osservativo $\underline{a} \doteq \{(a_i|_{i \in \eta}\}$. Tramite coarse-graining di \underline{a} è possibile costruire il test deterministico costituito dall'unico effetto $(e'| \doteq \sum_{i \in \eta} (a_i|$. Per ipotesi $(e| = (e'|$; da ciò si conclude che per ogni stato $|\rho\rangle \in \mathfrak{S}(A)$ si ha che $\sum_{i \in \eta} (a_i|\rho) = (e|\rho)$ indipendentemente dalla scelta del test \underline{a} . Quest'ultima è proprio la definizione di causalità 2.20. \square

Fattorizzazione dell'effetto deterministico

Il risultato precedente mostra quindi che la relazione di completezza per ogni test osservativo è unica: i.e., dato un test $\underline{a} \doteq \{(a_i|_{i \in \eta}\}$ si ha che $\sum_{i \in \eta} (a_i| = (e|$. Inoltre si conclude immediatamente che l'effetto deterministico di un sistema multipartito è dato dalla composizione parallela degli effetti deterministici di ciascun sottosistema:

$$(e|_{AB} = (e|_A \otimes (e|_B$$

Quest'ultime due osservazioni consentono di notare che in una teoria causale il calcolo delle probabilità marginali degli eventi è molto semplificata. Dal momento che la probabilità di un evento in un test è indipendente dai test eseguiti al suo output, è possibile sostituire tutta la rete successiva ai test di interesse con una rete più semplice, senza modificare le probabilità marginali in questione. In particolare è possibile sostituire tutto con un effetto deterministico su tutti i sistemi gioco. Ad esempio, per valutare $\Pr[\rho_i, A_j, C_l]$ del circuito di figura 2 si può procedere nel modo seguente:



Stato marginale

L'unicità dell'effetto deterministico permette inoltre una definizione univoca di quello che è chiamato *stato marginale* di un sistema multipartito. Esso consiste nel funzionale sugli effetti in grado di dare le corrette probabilità marginali su di un sistema per tutti i possibili test osservativi; e.g., siano $|\sigma\rangle_{AB} \in \mathfrak{S}(AB)$ uno stato, e $\underline{a} \doteq \{(a_i|_{i \in \eta}\}$, $\underline{b} \doteq \{(b_j|_{j \in \chi}\}$ due test osservativi. La probabilità congiunta di realizzazione degli eventi $(a_i|, (b_j|$ per lo stato $|\sigma\rangle_{AB}$ è, come si sa, data da:

$$\Pr[a_i, b_j] \doteq (a_i|_A (b_j|_B |\sigma\rangle_{AB}$$

La probabilità marginale per il sistema A è per definizione:

$$\Pr[a_i] \doteq \sum_{j \in \chi} \Pr[a_i, b_j] = \sum_{j \in \chi} (a_i|_A (b_j|_B |\sigma\rangle_{AB}$$

Sfruttando l'unicità dell'effetto deterministico per ogni sistema, è possibile riscrivere la relazione precedente nel modo seguente:

$$\Pr[a_i] (a_i|_A (e|_B |\sigma\rangle_{AB} \doteq (a_i|_A |\rho\rangle_A$$

Pertanto lo stato $|\rho\rangle_A$ è un funzionale su $\mathfrak{E}(A)$ in grado di riprodurre correttamente le probabilità marginali del sistema A per lo stato $|\sigma\rangle_{AB}$; $|\rho\rangle_A$ è detto stato marginale di $|\sigma\rangle_{AB}$ sul sistema A . Vale pertanto la seguente definizione:

Definizione 2.22 (Stato marginale [11]). *Lo stato marginale di $|\sigma\rangle_{AB}$ sul sistema A è lo stato $|\rho\rangle_A \doteq (e|_B |\sigma\rangle_{AB}$.*

In una teoria causale è molto semplice anche la caratterizzazione dei canali, ossia delle trasformazioni deterministiche.

Lemma 2.3 (Caratterizzazione dei canali [11]). *In una teoria causale una trasformazione $\mathcal{C} \in \mathfrak{T}(A, B)$ è un canale se e solo se:*

$$\text{---}^A \boxed{\mathcal{C}} \text{---}^B \boxed{A} = \text{---}^A \boxed{e}$$

Dimostrazione. \Rightarrow : Se \mathcal{C} è un canale allora $(e|_B \mathcal{C}$ è un effetto deterministico per il sistema A . Per unicità di quest'ultimo vale la relazione mostrata nel lemma.

\Leftarrow : Si supponga che $\mathcal{C} \doteq \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \eta}$ sia un test da A a B e che $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_{i_0}$ sia una trasformazione per la quale valga la relazione del lemma. Tramite coarse-graining è possibile definire il canale $\mathcal{C}' \doteq \sum_{i \in \eta} \mathcal{C}_i$. Dal momento che \mathcal{C}' è un canale si ha che $(e|_A = (e|_B \mathcal{C}' = (e|_A + (e|_B [\sum_{i \neq i_0} \mathcal{C}'])$. Pertanto $(e|_B [\sum_{i \neq i_0} \mathcal{C}']$ è uguale a zero. Ciò implica che $\sum_{i \neq i_0} \mathcal{C}' = 0$, e perciò $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Pertanto \mathcal{C} è un canale. \square

Nota. Il lemma precedente implica che un test $\mathcal{A} \doteq \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \eta}$, con $\mathcal{A}_i \in \mathfrak{T}(A, B)$, soddisfa la condizione di normalizzazione:

$$\sum_{i \in \eta} (e|_B \mathcal{A}_i = (e|_A$$

Precedentemente è stato introdotto il set $\widehat{\mathfrak{G}}(A)$, identificandolo come l'insieme degli stati deterministici, affermando che essi vengono comunemente detti stati normalizzati. Si cercherà ora di giustificare tale affermazione nell'ambito delle teorie causali. In generale uno stato $|\rho\rangle \in \mathfrak{G}(A)$ è detto *normalizzato* se $\|\rho\|_A = 1$, dove $\|\cdot\|_A$ è la cosiddetta *norma operativa* sul sistema A . Per uno stato $|\rho\rangle \in \mathfrak{G}(A)$, la sua norma $\|\rho\|_A$ può essere definita nel modo seguente:⁶

$$\|\rho\|_A = \sup'_{(e| \in \mathfrak{E}(A)} (e| \rho)_A$$

dove \sup' indica che la ricerca dell'estremo superiore deve limitarsi ai soli effetti deterministici. Con tale definizione di norma operativa si può mostrare che vale il seguente lemma:

Lemma 2.4 (Caratterizzazione degli stati normalizzati [11]). *Sia $|\rho\rangle \in \mathfrak{G}(A)$. In una teoria causale le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- A. $|\rho\rangle$ è normalizzato;
- B. $(e| \rho) = 1$;
- C. $|\rho\rangle$ è deterministico.

Dimostrazione. **A** \Leftrightarrow **B**: per quanto si è visto nel lemma 2.2 la causalità implica l'unicità dell'effetto deterministico. Pertanto la ricerca dell'estremo superiore della definizione di norma operativa va limitata solamente all'unico effetto deterministico $(e| \in \mathfrak{E}(A)$. Si conclude quindi immediatamente l'equivalenza fra i punti **A** e **B**:

$$1 = \|\rho\|_A = \sup'_{(e| \in \mathfrak{E}(A)} (e| \rho)_A = (e| \rho)_A$$

⁶ Si veda [11] per dettagli.

La norma operativa

Stati normalizzati e stati deterministici in teorie causali

B \Leftrightarrow **c**: dal risultato del lemma 2.3 si conclude immediatamente che uno stato $|\rho\rangle \in \mathfrak{S}(A)$ è deterministico se e solo se $(e|\rho)_A = 1$: infatti uno stato deterministico del sistema A non è altro che un canale appartenente a $\mathfrak{T}(I, A)$. Dal momento che l'effetto deterministico sul sistema I è il numero 1, la condizione del lemma precedente può essere riscritta come:

$$(e|\rho)_A = 1 \quad \square$$

Stati distinguibili e test discriminanti

Poiché è stata introdotta la norma operativa conviene proseguire con la definizione dei concetti di *discriminabilità tra stati* e di *test discriminante*. Tale concetto sarà pervasivo di tutte le pagine che seguiranno.

Definizione 2.23 (Stati distinguibili e test discriminanti [11]). *Gli stati $|\rho_i\rangle_A \in \mathfrak{S}(A)$, con $i \in \eta$, sono fra loro perfettamente distinguibili se esiste un test osservativo $\underline{a} \doteq \{(a_i)_{i \in \eta}\} \subset \mathfrak{C}(A)$ per il quale:*

$$(a_j|\rho_i) = \|\rho_i\| \delta_{ij}$$

Il test \underline{a} è detto *test discriminante*.

Per ogni stato $|\rho\rangle_A$ è possibile considerare lo stato normalizzato:

$$|\bar{\rho}\rangle_A \doteq \frac{|\rho\rangle_A}{(e|\rho)_A}$$

Operazionalmente significa che è sempre possibile fare preparazioni riscalate: si esegue il test preparativo $\underline{\rho} \doteq \{|\rho_i\rangle_{i \in \eta}\}$, e se esso restituisce l'outcome i_0 si può affermare di aver preparato lo stato $|\bar{\rho}_{i_0}\rangle$. In altre parole in una teoria operativa è sempre possibile promuovere un evento preparativo a test deterministico preparativo. Proseguendo il ragionamento si nota pertanto che in una teoria causale non c'è alcun motivo per proibire che ogni stato normalizzato possa essere prodotto tramite un test a singolo outcome. Questo implica che ogni stato è proporzionale a uno stato deterministico. Vale però anche il viceversa arrivando in tal modo alla seguente ulteriore caratterizzazione delle teorie causali:

Lemma 2.5 (Caratterizzazione della causalità tramite stati normalizzati [11]). *Una teoria operativa è causale se e solo se ogni stato è proporzionale ad uno stato deterministico.*

Dimostrazione. \Rightarrow : triviale, dato che in una teoria causale ogni stato $|\rho\rangle \in \mathfrak{S}(A)$ è riscrivibile come $|\rho\rangle = (e|\rho)_A |\bar{\rho}\rangle$, con $\|\bar{\rho}\| = 1$.

\Leftarrow : sia $|\rho\rangle_A$ uno stato arbitrario per il sistema A , e $(e|_A, (e'|_A)$ due effetti deterministici per A . Per ipotesi si ha che $|\rho\rangle_A = k|\bar{\rho}\rangle_A$ con $\|\bar{\rho}\|_A = 1$. Questo porta a concludere che:

$$(e|\rho)_A = k = (e'|\rho)_A$$

Dal momento che $|\rho\rangle_A$ è arbitrario si conclude che $(e|_A = (e'|_A$, che per il lemma 2.2 è equivalente ad affermare che la teoria operativa è causale. \square

2.3.2 Test condizionati

Una teoria operativa causale permette di introdurre il concetto di *test condizionato*: in una sequenza causale è cioè possibile scegliere un test a seconda dell'esito di un test precedente.

Definizione 2.24 (Test condizionato [11]). Sia $\underline{A} \doteq \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \eta}$ un test dal sistema A al sistema B , e per ogni $i \in \eta$ sia $\underline{B}^{(i)} \doteq \{\mathcal{B}_j^{(i)}\}_{j \in \chi_i}$ un test i cui eventi appartengono a $\mathfrak{T}(B, C)$. $\underline{B}^{(i)} \circ \underline{A}$ è detto test \underline{B} condizionato da \underline{A} , ed è costituito dagli eventi $\mathcal{B}_j^{(i)} \circ \mathcal{A}_i$ con $(i, j) \in \bigcup_{i \in \eta} \{i\} \times \chi_i$. Pittoricamente gli eventi sono rappresentati nel modo seguente:

$$\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \boxed{\mathcal{B}_j^{(i)} \circ \mathcal{A}_i} \text{---} C \text{---} \doteq \text{---} A \text{---} \boxed{\mathcal{A}_i} \text{---} B \text{---} \boxed{\mathcal{B}_j^{(i)}} \text{---} C \text{---} \end{array} \quad (2.2)$$

La definizione precedente ha senso in un contesto operativo causale, dove l'unicità dell'effetto deterministico assicura che il test $\underline{B}^{(i)} \circ \underline{A}$ soddisfi la condizione di normalizzazione della nota successiva al lemma 2.3:

$$\sum_{i \in \eta} \sum_{j \in \chi_i} (e|_C (\mathcal{B}_j^{(i)} \circ \mathcal{A}_i)) = \sum_{i \in \eta} \mathcal{A}_i = (e|_A)$$

Il condizionamento esprime la possibilità di poter scegliere cosa fare ad un determinato *step* del circuito usando l'informazione classica generata dallo *step* precedente. In una teoria operativa causale non c'è motivo di proibire che uno sperimentatore possa eseguire un test condizionato. Nel seguito si presupporrà che in un contesto causale i test condizionati siano sempre possibili; in effetti la possibilità di poterli eseguire è sostanzialmente equivalente al requisito di causalità.

Lemma 2.6 ([11]). Una teoria operativa in cui ogni test condizionato è lecito è causale.

Test condizionati Vs causalità

Dimostrazione. Siano $(e|_A, (e'|_A$ due effetti deterministici per il sistema A , e $|\bar{\rho}) \in \mathfrak{S}(A)$ uno stato arbitrario. Per definizione esiste un test preparativo $\underline{\rho} \doteq \{|\rho_i)\}_{i \in \eta}$ per il quale $\exists i_0 \in \eta$ tale che $|\bar{\rho}) = |\rho_{i_0})$. Tramite coarse-graining è possibile ottenere il test preparativo a due outcome $\{|\rho_0), |\rho_1)\}$, nel quale:

$$\begin{aligned} |\rho_0) &= |\rho_{i_0}) = |\bar{\rho}) \\ |\rho_1) &= \sum_{i \neq i_0} |\rho_i) \end{aligned}$$

Si consideri ora il test condizionato definito dai due passaggi seguenti:

1. si esegua il test preparativo $\{|\rho_0), |\rho_1)\}$;
2. se l'outcome della preparazione è zero si esegua l'osservazione $(e|_A$, altrimenti $(e'|_A$.

Il test condizionato in questione è di fatto un test dal sistema triviale in se stesso, pertanto deve soddisfare la condizione di normalizzazione:

$$(e| \rho_0)_A + (e'| \rho_1)_A = 1$$

D'altro canto poiché $(e'|_A$ è deterministico si deve avere che $(e'| \rho_0)_A + (e'| \rho_1)_A = 1$. Confrontando le due espressioni si deduce che $(e| \rho_0)_A = (e'| \rho_0)_A$. Dal momento che $|\rho_0)_A$ è uno stato generico si conclude che i due effetti deterministici sono uguali e pertanto la teoria operativa è causale. \square

Test misura-e-riprepara

Esiste una categoria particolare di test condizionati che verranno in seguito utilizzati nell'affrontare il problema delle variabili nascoste: si sta parlando dei *test misura-e-riprepara*. Sono test costituiti da un'osservazione seguita da una preparazione, come nel disegno seguente:

$$\text{---} A \text{---} \boxed{a_i} \text{---} \boxed{\rho_i} \text{---} B \text{---}$$

Un test misura-e-riprepara è un test condizionato in cui il sistema di collegamento intermedio (quello che nella definizione 2.24 era il sistema B) è costituito dal sistema triviale I, e dove la famiglia dei secondi test è costituita da test preparativi deterministici.

2.3.3 No-signaling senza interazione

Il requisito di causalità per una teoria operativa, che è di fatto un principio di no-signaling dal futuro, implica un'altra tipologia di no-signaling: l'impossibilità di comunicare senza interazione: i.e., eseguendo solamente test locali.

No-signaling dal futuro Vs
no-signaling senza
interazione

Teorema 2.1 (No-signaling senza-interazione [11]). *In una teoria operazione causale è impossibile comunicare eseguendo solamente test locali.*

Dimostrazione. Si supponga una situazione in cui due sperimentatori, Alice e Bob, siano spazialmente separati e condividano uno stato bipartito $|\Psi\rangle_{AB}$. Alice esegue un test locale $\mathcal{A} \doteq \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \Omega}$ sul suo sistema A, e analogamente Bob esegue $\mathcal{B} \doteq \{\mathcal{B}_j\}_{j \in \Omega}$ su B. La probabilità di realizzazione congiunta degli outcome i, j rispettivamente per Alice e Bob è definita nel modo seguente:

$$\Pr[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j] \doteq (e|_{AB} (\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{B}_j) |\Psi\rangle_{AB})$$

Le probabilità marginali di Alice e Bob sono rispettivamente:

$$\Pr[\mathcal{A}_i] \doteq \sum_{j \in \Omega} \Pr[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j] \qquad \Pr[\mathcal{B}_j] \doteq \sum_{i \in \Omega} \Pr[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j]$$

Si consideri la marginale di Alice, essa assume l'espressione:

$$\begin{aligned} \Pr[\mathcal{A}_i] &\doteq \sum_{j \in \Omega} \Pr[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j] = \sum_{j \in \Omega} (e|_{AB} (\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{B}_j) |\Psi\rangle_{AB}) = \\ &= (e|_A \left\{ \mathcal{A}_i \otimes \left[\sum_{j \in \Omega} (e|_B \mathcal{B}_j) \right] \right\} |\Psi\rangle_{AB}) = (e|_A \mathcal{A}_i (e|_B |\Psi\rangle_{AB})) \end{aligned}$$

dove è stata usata la condizione di normalizzazione $\sum_{j \in \Omega} (e|_B \mathcal{B}_j) = (e|_B$. Si può notare che la probabilità marginale di Alice non dipende dalla scelta del test \mathcal{B} da parte di Bob. Un risultato analogo vale con i ruoli di Alice e Bob invertiti. Si conclude pertanto che non è possibile comunicazione eseguendo solamente test locali. \square

No-signaling e foliazioni

Un modo analogo per definire la richiesta di *no-signaling senza interazione*, è affermare che non è possibile lo scambio di informazioni tra sistemi indipendenti. In una teoria causale un percorso di input-output identifica una *catena causale*, e analogamente una slice globale caratterizza le cosiddette *anti-catene causali*. Due sistemi possono appartenere alla stessa catena causale (risultando così causalmente connessi) oppure no (risultando quindi indipendenti). Dal momento che il verso di scorrimento del tempo è stato scelto in funzione della definizione di causalità, una catena causale può essere considerata come una linea del tempo. D'altro canto se due sistemi A e B sono indipendenti, quale dei due è situato nel passato dell'altro è totalmente arbitrario. Dovrebbe risultare lampante l'analogia con la relatività speciale per la quale se due eventi hanno separazione *space-like* esistono sistemi di riferimento inerziali per i quali l'uno è antecedente all'altro e ulteriori sistemi di riferimento inerziali in cui accade il contrario. Pertanto una *foliazione* completa costituita da anti-catene può essere identificata come la scelta di un sistema di riferimento.

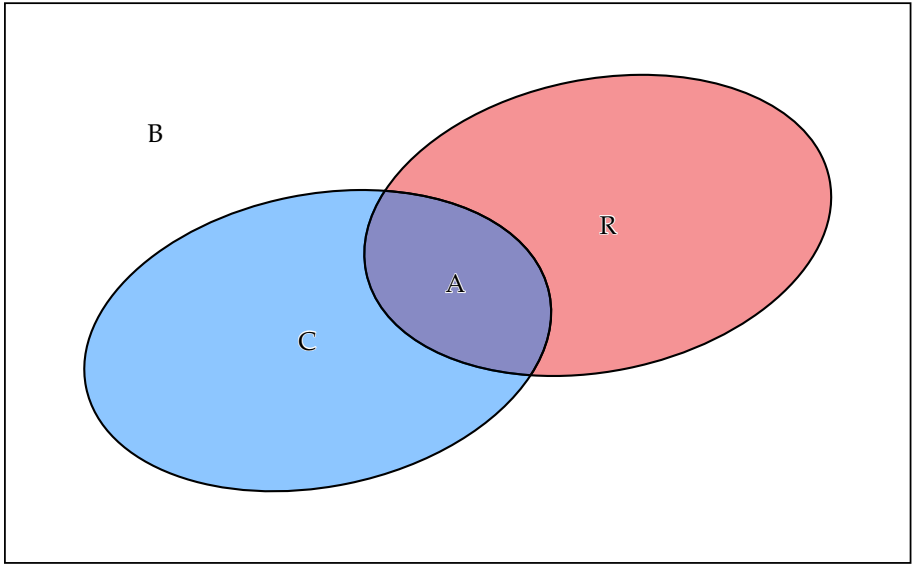
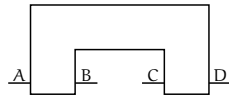


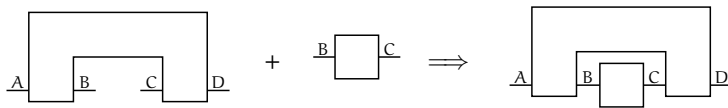
Figura 3.: Rappresentazione tramite diagrammi di Venn delle relazioni fra i concetti di causalità (C), retrocausalità (R), acausalità (A) e bicausalità (B).

2.3.4 La non-causalità

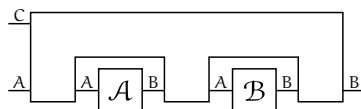
Alla luce della definizione di causalità ci si può chiedere se in un circuito operativo possono esistere relazioni di input-output non causali. Si prenda ad esempio un box a forma di ferro di cavallo come il seguente:



Lo si consideri come un frammento di circuito connesso secondo le regole di collegamento illustrate precedentemente. Il blocco può essere visto come una mappa che trasforma un test di $\mathfrak{T}(B, C)$ in un test appartenente a $\mathfrak{T}(A, D)$, come illustrato di seguito:



Dovrebbe essere chiaro che la probabilità marginale per il box a forma di ferro di cavallo in generale dipende dalla scelta del box singolo, e viceversa. Una teoria di questo tipo non è causale. Si potrebbe però in ogni caso pensare che all'interno del box a forma di ferro di cavallo la rete sia causale: si noti però che si è passati a una descrizione a grana più fine, e non è detto che esista. Un altro esempio è costituito dal seguente frammento di circuito:



nel quale il risultato della trasformazione sugli eventi \mathcal{A} e \mathcal{B} è $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ o $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ a seconda di un input sul sistema C. È facile convincersi che tale risultato non può essere ottenuto

I vari significati di non-causalità

tramite un circuito operativo causale, dal momento che non c'è modo di invertire l'ordine di composizione di due test usandoli una sola volta.

Se risulta chiaro che possono esistere modelli operazionali non causali, altrettanto chiaro non è il modo in cui tali modelli rifiutano la definizione 2.20 (o equivalentemente 2.21). Sicuramente è possibile considerare una definizione opposta a 2.20, in cui l'asimmetria tra gli stati e gli effetti è invertita.

Definizione 2.25 (Retrocausalità). *Una teoria operativa è detta retrocausale se:*

$$\sum_{i \in \eta} (a_j | \rho_i)_A = \sum_{i \in \chi} (a_j | \sigma_i)_A$$

per ogni coppia di test preparativi $\underline{\rho}_A \doteq \{|\rho_i\rangle_A\}_{i \in \eta} \subset \mathfrak{S}(A)$, $\underline{\sigma}_A \doteq \{|\sigma_i\rangle_A\}_{i \in \chi} \subset \mathfrak{S}(A)$, per ogni test osservativo $\underline{a}_A \doteq \{ \langle a_j | \cdot \rangle_A \}_{j \in \chi} \subset \mathfrak{E}(A)$, e per ogni sistema A .

Si noti che le definizioni 2.25 e 2.20 non si escludono a vicenda: i.e., è possibile considerare una teoria operativa sia causale che retrocausale. Un caso di siffatto tipo avrebbe la caratteristica che tutte le marginalizzazioni delle probabilità non dipendono dagli altri test presenti nel circuito. Dal momento che con il termine *causalità* ci si riferisce usualmente al concetto secondo il quale l'informazione si propaga dall'input verso l'output, una teoria per cui valgono entrambe le definizioni 2.25 e 2.20, mostrerebbe un'assenza di propagazione dell'informazione: sarebbe pertanto completamente *acausale*.

Definizione 2.26 (Acausalità). *Una teoria operativa sia causale che retrocausale è detta acausale.*

Si possono poi considerare le teorie che presentano propagazione di informazione in entrambi i versi del circuito. Tali modelli non sarebbero pertanto né causali né retrocausali:

Definizione 2.27 (Bicausalità). *Una teoria operativa è detta bicausale se non è né causale, né retrocausale.*

Cos'è quindi una teoria operativa non causale? Riferendosi al disegno 3 si vede chiaramente che è una teoria che può essere o bicausale, o *strettamente retrocausale*.⁷

2.4 DISCRIMINABILITÀ LOCALE

Un'assunzione comune nell'ambito delle teorie probabilistiche è quella che di seguito verrà chiamata *discriminabilità locale*.

Definizione 2.28 (Discriminabilità locale [11]). *Una teoria operativa soddisfa la discriminabilità locale se per ogni coppia di stati distinti $|\rho\rangle, |\sigma\rangle \in \mathfrak{S}(AB)$, esistono due effetti locali $\langle a| \in \mathfrak{E}(A)$, $\langle b| \in \mathfrak{E}(B)$ in modo tale che:*

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ \text{---} B \text{---} \end{array} \right) \rho \begin{array}{c} \langle a| \\ \langle b| \end{array} \neq \left(\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ \text{---} B \text{---} \end{array} \right) \sigma \begin{array}{c} \langle a| \\ \langle b| \end{array} \quad (2.3)$$

La discriminabilità locale per stati bipartiti implica la discriminabilità locale per stati multipartiti tramite semplice iterazione. Questo requisito di discriminabilità prescrive che se due stati bipartiti sono differenti, allora è possibile distinguerli usando solamente degli strumenti locali. Il risultato della discriminazione potrebbe non essere ottimale,

⁷ L'avverbio *strettamente* indica che bisogna escludere l'intersezione acausale dal disegno 3.

,ma in ogni caso strettamente migliore rispetto ad una risposta random. In realtà in una teoria convessa due sperimentatori lontani, Alice e Bob, possono sempre trovare un protocollo di discriminazione di stati migliore di una risposta random utilizzando solamente operazioni locali e comunicazione classica (LOCC).

Lemma 2.7 (Discriminazione LOCC [11]). *In una teoria convessa con discriminabilità locale se due stati $|\rho_0\rangle, |\rho_1\rangle \in \mathfrak{S}(AB)$ sono distinti esiste un protocollo di discriminazione LOCC costituito dal test $\underline{A} \doteq \{A_0, A_1\}$, per il quale la probabilità del caso peggiore è strettamente inferiore ad $1/2$.*

Convessità e discriminazione
LOCC

La discriminabilità locale è un vantaggio non indifferente per gli esperimenti: permette ad esempio di eseguire la tomografia di stati multipartiti usando solamente misure locali; inoltre ogni effetto bipartito per il sistema composto AB può essere scritto come combinazione lineare di composizioni parallele di effetti locali.

Lemma 2.8 ([11]). *Siano $(\dots, |\rho_i\rangle, \dots), (\dots, |\bar{\rho}_i\rangle, \dots)$ due basi per gli spazi vettoriali $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(A)$ e $\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(B)$. Siano inoltre $(\dots, (a_i|, \dots), (\dots, (b_j|, \dots)$ due basi per gli spazi $\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(A)$ e $\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(B)$. Allora ogni stato $|\sigma\rangle_{AB} \in \mathfrak{S}(AB)$ e ogni effetto $(c|_{AB} \in \mathfrak{E}(AB)$ può essere scritto nel modo seguente:*

$$|\sigma\rangle_{AB} = \sum_{i,j} A_{ij} |\rho_i\rangle_A |\bar{\rho}_j\rangle_B$$

$$(c|_{AB} = \sum_{i,j} B_{ij} (a_i|_A (b_j|_B$$

con $(A_{ij}), (B_{ij})$ matrici reali.

Dimostrazione. Per discriminabilità locale tutti gli effetti fattorizzati riescono a discriminare gli stati per sistemi bipartiti. Il loro span pertanto ricopre tutto $\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(B)$. Inoltre poiché $\mathfrak{E}_{\mathbb{R}}(B)$ e $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(B)$ hanno stessa dimensione (si ricordi che si sta lavorando in dimensione finita e che l'uno è il duale dell'altro) questo implica anche che gli stati prodotto generino $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(B)$. \square

Un'altra conseguenza notevole è la possibilità di distinguere due trasformazioni $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}(A, B)$ senza doverne verificare l'azione su un sistema ancillare C; vale infatti il seguente lemma:

Discriminabilità locale e
trasformazioni

Lemma 2.9 ([11]). *Se due trasformazioni $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}(A, B)$ sono diverse e vale la discriminabilità locale, allora esiste uno stato $|\rho\rangle$ per il sistema A tale che:*

$$\rho \xrightarrow{A} \mathcal{A} \xrightarrow{B} \neq \rho \xrightarrow{A} \mathcal{B} \xrightarrow{B} \quad (2.4)$$

Dimostrazione. Essendo per ipotesi $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, si ha che esiste un sistema C e uno stato congiunto $|\sigma\rangle_{AC} \in \mathfrak{S}(AC)$ tale che $\mathcal{A}|\sigma\rangle_{AC} \neq \mathcal{B}|\sigma\rangle_{AC}$. Dal momento che vale la discriminabilità locale esistono degli effetti $(b| \in \mathfrak{E}(B)$, $(c| \in \mathfrak{E}(C)$ per i quali:

$$\sigma \xrightarrow{A} \mathcal{A} \xrightarrow{B} (b| \quad \neq \quad \sigma \xrightarrow{A} \mathcal{B} \xrightarrow{B} (b| \quad (2.5)$$

Definendo $|\rho\rangle \doteq (c|_C |\sigma\rangle_{AC}$ si ottiene $(b|_B \mathcal{A}|\rho\rangle_A \neq (b|_B \mathcal{B}|\rho\rangle_A$, cioè $\mathcal{A}|\rho\rangle \neq \mathcal{B}|\rho\rangle$. \square

2.5 PURIFICAZIONE

In generale lo stato marginale $|\rho\rangle \in \mathfrak{S}(A)$ di uno stato puro congiunto $|\Psi\rangle \in \mathfrak{S}(AB)$ non è necessariamente puro. Cosa si può dire invece nel caso opposto? Dato uno stato $|\rho\rangle_A$ per un sistema A è possibile trovare uno stato puro per il sistema AB , per il quale il suo marginale su A sia proprio $|\rho\rangle_A$? Uno stato di AB in grado di far questo viene detto *purificazione* di $|\rho\rangle_A$. Per i risultati che seguiranno si supporrà sempre che la teoria operazionale goda sia della proprietà di causalità che di discriminabilità locale.

Definizione 2.29 (Purificazione [11]). *Uno stato $|\Psi\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(AB)$ è una purificazione di $|\rho\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(A)$ se $|\Psi\rangle$ è puro e:*

$$\langle \rho | \text{---}^A \neq \left(\Psi \begin{array}{c} \text{---}^A \\ \text{---}^B \end{array} \right) \langle e | \quad (2.6)$$

Se il sistema AB contiene una purificazione di $|\rho\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(A)$, il sistema B viene detto *sistema purificante per $|\rho\rangle$* . Inoltre $|\tilde{\rho}\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(B)$ definito da:

$$\langle \tilde{\rho} | \text{---}^B \neq \left(\Psi \begin{array}{c} \text{---}^A \langle e | \\ \text{---}^B \end{array} \right) \quad (2.7)$$

è detto *stato complementare di $|\rho\rangle$* .

Si trova immediatamente che la purificazione di uno stato puro è fattorizzata:

Lemma 2.10 ([11]). *Se $|\rho\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(A)$ è puro, allora la sua purificazione $|\Psi\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(AB)$ è della forma $|\Psi\rangle = |\rho\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle$, con $|\tilde{\rho}\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(B)$ puro.*

Dimostrazione. Si prenda un test osservativo $\mathfrak{E}(b) \doteq \{(b_i)\}_{i \in \chi}$ su B . Dal momento che $\sum_i (b_i | = (e |_B$ si ha che:

$$\langle \rho | \text{---}^A \neq \sum_{i \in \chi} \left(\Psi \begin{array}{c} \text{---}^A \\ \text{---}^B \langle b_i | \end{array} \right) \doteq \sum_{i \in \chi} \langle \rho_i | \text{---}^A \quad (2.8)$$

Pertanto gli stati $|\rho_i\rangle_A \doteq (b_i |_B |\Psi\rangle_{AB}$ costituiscono un raffinamento di $|\rho\rangle_A$. Dal momento che per ipotesi è puro, $|\rho\rangle$ può però avere solo raffinamenti triviali: i.e., $|\rho_i\rangle = p_i |\rho\rangle$ per un determinato set di probabilità p_i . In particolare si ha che:

$$p_i = (e | \rho_i\rangle_A = (e |_A (b_i |_B |\Psi\rangle_{AB}) = (b_i | \tilde{\rho}\rangle_B$$

dove $|\tilde{\rho}\rangle_B$ è lo stato complementare di $|\rho\rangle$. Si ottiene pertanto che:

$$\left(\Psi \begin{array}{c} \text{---}^A \\ \text{---}^B \langle b_i | \end{array} \right) = \left(\rho \begin{array}{c} \text{---}^A \\ \tilde{\rho} \begin{array}{c} \text{---}^B \langle b_i | \end{array} \end{array} \right) \quad \forall i \in \chi \quad (2.9)$$

Quindi $|\Psi\rangle_{AB}$ è indistinguibile da $|\rho\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle$ tramite test locali. Poiché vale la discriminabilità locale si conclude che $|\Psi\rangle_{AB} = |\rho\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle$. In più $|\tilde{\rho}\rangle$ è puro, altrimenti si avrebbe un raffinamento non triviale di $|\rho\rangle_A$. \square

La purificazione non è processo fisico: i.e., non è possibile trovare una trasformazione in grado di trasformare un arbitrario stato misto in una sua purificazione. Vale infatti ad esempio il seguente risultato per stati puri collineari.

Lemma 2.11 (Purificazione di stati collineari [11]). *Siano $|\rho_i\rangle$, con $i = 1, 2, 3$ tre stati collineari - i.e., $|\rho_1\rangle \neq |\rho_3\rangle$ e $|\rho_2\rangle = p|\rho_1\rangle + (1-p)|\rho_3\rangle$, con $0 < p < 1$. Per $n \in \mathbb{N}$, non esiste una trasformazione $\mathcal{C} \in \mathfrak{T}(A^{\otimes n}, AB)$ tale che $\mathcal{C}|\rho_2\rangle_A^{\otimes n} = |\Psi_i\rangle_{AB}$, dove $|\Psi_i\rangle_{AB}$ è una purificazione di $|\rho_i\rangle_A$.*

Dimostrazione. Si ipotizzi per assurdo che per un qualche $n \in \mathbb{N}$ esista \mathcal{C} . Per lo stato $|\rho_2\rangle_A^{\otimes n}$ allora si otterrebbe:

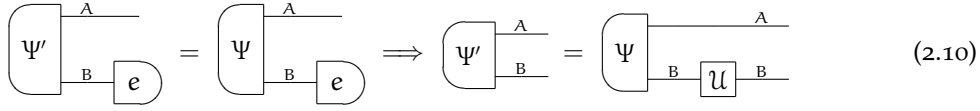
$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle_{AB} = \mathcal{C}|\rho_2\rangle_A^{\otimes n} &= p^n \mathcal{C}|\rho_1\rangle_A^{\otimes n} + (1-p)^n \mathcal{C}|\rho_3\rangle_A^{\otimes n} + |\omega\rangle_{AB} = \\ &= p^n |\Psi_1\rangle_{AB} + (1-p)^n |\Psi_3\rangle_{AB} + |\omega\rangle_{AB} \end{aligned}$$

dove $|\omega\rangle_{AB}$ è uno stato in generale non normalizzato del sistema AB. Si è perciò trovato un raffinamento non triviale per lo stato $|\Psi_2\rangle_{AB}$. Essendo però $|\Psi_2\rangle_{AB}$ per ipotesi puro, si è giunti ad una contraddizione. \square

Se $|\Psi\rangle_{AB}$ è una purificazione di $|\rho\rangle_A$, e \mathcal{U}_B è un canale reversibile sul sistema purificante, allora anche $|\Psi'\rangle_{AB} = \mathcal{J}_A \otimes \mathcal{U}_B |\Psi\rangle_{AB}$ è una purificazione per $|\rho\rangle_A$. Infatti $\mathcal{J}_A \otimes \mathcal{U}_B |\Psi\rangle_{AB}$ deve essere uno stato puro, altrimenti invertendo \mathcal{U}_B su $|\Psi'\rangle_{AB}$ si troverebbe per linearità che $|\Psi\rangle_{AB}$ è misto. La relazione opposta verrà invece assunta tramite il seguente postulato:

Assioma (Purificazione [11]). *Tutti gli stati ammettono una purificazione, unica a meno di un canale reversibile sul sistema purificante: se $|\Psi\rangle, |\Psi'\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(AB)$ sono due purificazioni dello stesso stato appartenente a $\widehat{\mathfrak{S}}(A)$, allora sono connesse da un canale reversibile $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}(B, B)$, cioè:*

Il postulato di purificazione



Un'ovvia conseguenza del postulato di purificazione è che in una teoria con purificazione esistono gli stati usualmente chiamati entangled:

Stati separabili e stati entangled

Definizione 2.30 (Stati separabili e stati entangled [11]). *Uno stato bipartito $|\sigma\rangle_{AB} \in \widehat{\mathfrak{S}}(AB)$ è separabile se può essere scritto come una combinazione convessa di stati prodotto, cioè come $|\sigma\rangle_{AB} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle_A |\psi_i\rangle_B$, con $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$. Uno stato bipartito è entangled se non è separabile.*

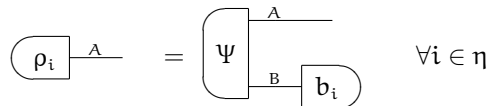
Come anticipato vale il seguente risultato:

Lemma 2.12 (Esistenza di stati entangled [11]). *Sia $|\Psi\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(AB)$ una purificazione di $|\rho\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(A)$. Se $|\rho\rangle$ è misto, allora $|\Psi\rangle$ è entangled.*

Dimostrazione. Si supponga per contraddizione che $|\Psi\rangle$ sia separabile. Poiché per definizione è puro deve essere della forma $|\Psi\rangle_{AB} = |\varphi_i\rangle_A |\psi_i\rangle_B$ con $|\varphi_i\rangle_A, |\psi_i\rangle_B$ puri. Da ciò si conclude che lo stato marginale $|\rho\rangle_A = (\mathcal{e}_B |\Psi\rangle_{AB}) = |\varphi_i\rangle_A$ è puro, in contraddizione con le ipotesi. \square

Verrà ora mostrato un risultato molto importante che lega la purificazione di stati normalizzati con le loro combinazioni convesse.

Teorema 2.2 (Purificazione dei test preparativi [11]). *Siano $\underline{\rho} \doteq \{|\rho_i\rangle\}_{i \in \eta}$ un test preparativo per il sistema A e $|\Psi\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(AB)$ una purificazione del test $\widehat{\underline{\rho}}$ ottenuto come coarse-graining totale di $\underline{\rho}$. Esiste allora un test osservativo $\underline{b} \doteq \{|b_i\rangle\}_{i \in \eta}$ sul sistema B per il quale:*



Tramite una scelta opportuna del sistema purificante B è possibile rendere il test osservativo \underline{b} discriminante.

Dimostrazione. Si prenda un set costituito da $|\eta|$ stati perfettamente discriminabili $\{\varphi_i\}_{i \in \eta} \subset \widehat{\mathfrak{S}}(C)$ per un qualche sistema C . Per definizione di distinguibilità perfetta esiste un test $\underline{c} \doteq \{c_i\}_{i \in \eta}$ discriminante: i.e.,

$$\boxed{\varphi_i} \xrightarrow{C} \boxed{c_j} = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \eta \quad (2.11)$$

Si consideri il seguente stato:

$$|\sigma\rangle_{AC} \doteq \sum_{i \in \eta} |\rho_i\rangle_A \otimes |\varphi_i\rangle_C \in \widehat{\mathfrak{S}}(AC)$$

per il quale $|\rho\rangle_A = (e|_C |\sigma\rangle_{AC}$. Sia $|\Psi\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(ACD)$ una purificazione di $|\sigma\rangle_{AC}$. Per definizione $|\Psi\rangle_{ACD}$ è anche una purificazione di $|\rho\rangle_A$. Usando la condizione di discriminabilità di eq.(2.11) si trova per ogni $i \in \eta$:

$$\boxed{\rho_i} \xrightarrow{A} = \boxed{\sigma} \xrightarrow{C} \boxed{c_i} = \boxed{\Psi} \xrightarrow{A} \boxed{c_i} = \boxed{\Psi} \xrightarrow{CD} \boxed{b_i}$$

dove il test discriminante \underline{b} è definito in modo tale che i propri eventi siano $(b_i|_{CD} \doteq (c_i|_C (e|_D$. Questo mostra l'esistenza di una purificazione di $|\rho\rangle_A$ con sistema purificante $B \doteq CD$ e test discriminante \underline{b} . \square

Lo steering

La proprietà enunciata nel teorema precedente è altresì chiamata *steering*: uno stato bipartito $|\sigma\rangle_{AB}$ fa lo steering del suo marginale $|\rho\rangle_A \doteq (e|_B |\sigma\rangle_{AB}$ sul sistema A , se ogni decomposizione convessa di $|\rho\rangle_A = \sum_{i \in \eta} p_i |\rho_i\rangle_A$ è indotta da un opportuno test osservativo su B . La definizione di steering data precedentemente permette di asserire che in una teoria operativa con purificazione ogni stato puro fa lo steering dei propri stati marginali. È inoltre possibile dimostrare il seguente risultato:

Lemma 2.13 ([11]). *Sia $|\Psi\rangle \in \widehat{\mathfrak{S}}(AB)$ una purificazione di $|\rho\rangle$. Allora uno stato $|\sigma\rangle_A$ appartiene al set di raffinamento $\mathfrak{D}(|\rho\rangle_A)$ se e solo se esiste un effetto $(b_\sigma| \in \mathfrak{E}(B)$ tale che:*

$$\boxed{\sigma} \xrightarrow{A} = \boxed{\Psi} \xrightarrow{B} \boxed{b_\sigma}$$

Dimostrazione. \Leftarrow : triviale.

\Rightarrow : sia $|\sigma\rangle \in \mathfrak{D}(|\rho\rangle)$, per definizione esiste un test preparativo $\underline{\rho} \doteq \{\rho_i\}_{i \in \eta}$ e un outcome i_0 tale che $|\rho_{i_0}\rangle = |\sigma\rangle$. Utilizzando il teorema di purificazione con $(b_\sigma| \doteq (b_{i_0}|$ si dimostra l'asserto. \square

3

VINCOLI PROBABILISTICI DEL REALISMO

3.1	Formalizzazione matematica	40
3.1.1	Il framework	43
3.1.2	λ -indipendenza e single-valuedness	45
3.1.3	Determinismo debole, forte e indipendenza dagli outcome	47
3.1.4	Indipendenza dai parametri	49
3.1.5	Località	50
3.2	Teoremi no-go	50
3.2.1	Il paradosso EPR	51
3.2.2	Il teorema di Bell	52
3.3	Estensioni dei teoremi precedenti	55
3.3.1	Il paradosso EPR in versione debole	56
3.3.2	Non-località di Hardy-Cabello	56
3.4	Teoremi no-go e proprietà delle teorie operazionali	62
3.4.1	EPR	62
3.4.2	Non-località di Hardy-Cabello	65
3.4.2.1	Test in cascata	66
3.4.2.2	Stato bipartito	70

ALLA luce delle osservazioni fatte in §1.2 dovrebbe essere chiaro lo stretto legame fra il concetto di realismo e quello di variabili nascoste. Sorge però spontanea la seguente domanda: assumendo un approccio realista, quali caratteristiche può avere una teoria a variabili nascoste per essere equivalente a una teoria operativa? Lo scopo è quello di riuscire a trovare una serie di argomenti che riescano a delineare quali siano le proprietà di un modello a variabili nascoste partendo dall'ipotesi che esso sia equivalente ad uno operativo caratterizzato da un determinato insieme di proprietà (conformazione dei coni degli stati e degli effetti, ipotesi di steering e purificabilità, ecc.). In questo capitolo si mostreranno due di questi possibili argomenti, ma si è fiduciosi del fatto che sia possibile trovarne altri che non solo escludano altri differenti set di proprietà da quelli qui considerati, ma che possano scartare altre proprietà che qui non sono state prese in considerazione.

Al fine di fare tutto questo è necessario in via preliminare cercare di delineare quali possono essere le caratteristiche di un modello a variabili nascoste; bisognerà dare una definizione precisa di cosa si intende con il termine modello, e in particolare a cosa si riferisce l'espressione *modello a variabili nascoste*. Per far ciò sarà introdotto un particolare framework di lavoro che può essere pensato come ad una generalizzazione di quello operativo. Perché tale formalismo non è stato introdotto nel capitolo precedente quando si è parlato estensivamente delle teorie probabilistiche operative? Apparirà chiaramente nel corso della lettura che, per poter utilizzare questo formalismo, è necessario fare un'assunzione: se da un lato questo permetterà di dimostrare due lemmi (la cui correttezza appare molto ragionevole), dall'altro espone tutto l'argomento alla possibilità che qualcuno non condivida l'ipotesi di lavoro. Nonostante ciò il discorso che verrà esposto potrà essere modificato in modo da recuperare un formalismo concettualmente

equivalente a quello operativo, e che pertanto non necessita dell'ipotesi controversa. Il secondo approccio appare più conservativo, ma avrà la necessità di dover assumere a livello dei postulati i due lemmi citati precedentemente. In ogni caso tutte le altre conclusioni che verranno tratte saranno comunque valide. Concludendo, la motivazione per la quale il formalismo non è stato precedentemente introdotto è da ricercare nella volontà di non voler minare le fondamenta del concetto di teoria operativa.

3.1 FORMALIZZAZIONE MATEMATICA

Introduciamo ora un framework comodo per l'analisi a seguire; quello che verrà illustrato sarà quanto proposto da A. Brandenburger e N. Yanofsky [7], riadattato per il contesto operativo.

Esempio con uno stato e un effetto su di un singolo sistema

In una teoria operativa causale siano dati il test preparativo $\underline{\rho} \doteq \{|\rho_i\rangle\}_{i \in \eta_\rho}$ con $|\rho_i\rangle \in \mathfrak{S}(A)$, e il test osservativo $\underline{a} \doteq \{a_j\}_{j \in \eta_a}$ con $a_j \in \mathfrak{E}(A)$. Quando si considera il pairing $(a_j | \rho_i)$ si sta formalmente specificando la probabilità di realizzazione congiunta degli eventi $|\rho_i\rangle$ e a_j sapendo che l'esperimento condotto è stato quello in cui si sono usati il test preparativo $\underline{\rho}$ e il test osservativo \underline{a} , o analogamente la probabilità congiunta dell'evento etichettato dall'outcome i per il test $\underline{\rho}$, e dall'outcome j per il test \underline{a} .

Poiché per ipotesi si lavora in una teoria operativa, sappiamo che tutte le probabilità precedenti al variare di i e j esistono; è pertanto definito lo spazio di probabilità discreto $(\Omega_{\underline{\rho}, \underline{a}}, \mathbb{P}_{\underline{\rho}, \underline{a}})$,¹ dove:

- * lo spazio campionario $\Omega_{\underline{\rho}, \underline{a}}$ è definito come $\eta_\rho \times \eta_a$;
- * la misura di probabilità $\mathbb{P}_{\underline{\rho}, \underline{a}}$ sull'insieme delle parti $2^{\Omega_{\underline{\rho}, \underline{a}}}$ è definita nel modo seguente per gli elementi di cardinalità 1:

$$\mathbb{P}_{\underline{\rho}, \underline{a}}(\{(i, j)\}) \doteq \boxed{\rho_i} \text{---} \boxed{a_j}$$

o equivalentemente

- * $\Omega_{\underline{\rho}, \underline{a}} \doteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
- * $\mathbb{P}_{\underline{\rho}, \underline{a}}$ su $2^{\Omega_{\underline{\rho}, \underline{a}}}$ definita nel modo seguente per gli elementi di cardinalità 1:

$$\mathbb{P}_{\underline{\rho}, \underline{a}}(\{(i, j)\}) \doteq \begin{cases} \boxed{\rho_i} \text{---} \boxed{a_j} & \text{se } (i, j) \in \eta_\rho \times \eta_a \\ 0 & \text{altrimenti,}^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Per un test preparativo $\underline{\rho}'$ e uno osservativo \underline{a}' è definito un altro spazio di probabilità discreto $(\Omega_{\underline{\rho}', \underline{a}'}, \mathbb{P}_{\underline{\rho}', \underline{a}'})$ in cui lo spazio campionario è sempre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. In generale quindi

¹ La coppia (Ω, \mathbb{P}) è detta *spazio discreto di probabilità*, se Ω è un insieme al più numerabile e $\mathbb{P} : 2^\Omega \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è una mappa dall'insieme delle parti 2^Ω di Ω con le seguenti proprietà:

- * $\mathbb{P}(A) \quad \forall A \subset \Omega$
- * $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- * per ogni successione (A_n) di sottoinsiemi di 2^Ω mutuamente disgiunti

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \quad (\sigma\text{-additività})$$

² La richiesta di nullità su alcuni elementi di 2^Ω garantisce la σ -additività di \mathbb{P}_a .

per studiare un circuito del tipo (effetto | stato) dove non vengono preventivamente specificati i test si può considerare un unico spazio campionario di outcome Ω , definito come il prodotto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Su di questo esiste una famiglia di misure di probabilità, in cui ciascuna misura identifica una particolare scelta del test osservativo e di quello preparativo. Sulle coppie di outcome ammissibili ogni probabilità è definita dalla probabilità della teoria operativa.

Un approccio del genere è del tutto equivalente all'approccio operativo: non si sta introducendo nulla di nuovo, si sta solo mettendo in luce come ogni particolare circuito identifichi una determinata misura di probabilità sullo spazio degli outcome. Se da un lato lavorare in questo framework non porta nessun beneficio, dall'altro si presta bene ad essere esteso nel seguente modo. Come esposto precedentemente le probabilità della teoria operativa identificano le probabilità congiunte di realizzazione di determinati outcome *sapendo* che lo sperimentatore ha eseguito determinati test. Questo suggerisce che le probabilità della teoria operativa possano essere considerate delle *probabilità condizionate* di uno spazio di probabilità più grande, che oltre a comprendere gli outcome di tutti gli esperimenti del tipo (effetto | stato), comprende anche tutti i possibili |stato) e (effetto|. In quest'ottica un circuito $(a_j | p_i)$ determina la probabilità di realizzazione dell'outcome (i, j) condizionata dall'aver eseguito i test p e q . Al fine di far ciò è indispensabile introdurre una misura di probabilità sullo spazio allargato e scontrarsi con la necessità di dover attribuire una probabilità alla scelta di un test.

La possibilità di fare questo è strettamente legata con l'interpretazione che si assume per il concetto di probabilità. Nel caso bayesiano il problema non si pone: in questa visione le probabilità cercate coincidono con il *prior belief* di un secondo osservatore sulle scelte effettuate dal primo, e pertanto sarebbero ben definite. D'altro canto un approccio realista, ovvero un'interpretazione che considera le probabilità come quantità reali accessibili dallo sperimentatore, necessita effettivamente di un *super-osservatore* esterno in grado di *misurare* le probabilità di scelta degli esperimenti, oltre che le probabilità dei rispettivi outcome. Si ritiene però che una visione empiricista come quella operativa sia difficilmente conciliabile con un approccio bayesiano: l'operazionalismo si fonda infatti sulla possibilità di dare *definizioni operative*, e nell'interpretazione soggettiva delle probabilità è dubbio come questo possa essere eseguito per le probabilità di scelta. In ogni caso il secondo approccio risulta comunque insidioso, poichè è altrettanto dubbia la possibilità di accesso da parte dello sperimentatore delle probabilità misurate da un super-osservatore. Pertanto in un ottica operativa entrambe le interpretazioni sono problematiche: la prima perchè non è richiesta una definizione operativa, la seconda perchè anche se esistesse non sarebbe accessibile allo sperimentatore.

Nonostante questo inconveniente verrà introdotta una misura di probabilità anche sulla scelta di un particolare esperimento, in modo che, come detto precedentemente, successivamente si potranno dimostrare i lemmi 3.3 e 3.6, senza la necessità di doverli imporre a livello di postulati. Tale framework permette inoltre alcune speculazioni sul concetto di free will e sul suo legame con il principio di no-signaling dal futuro (vedi §4.2.1.1).

Riassumendo, i percorsi possibili sono due:

- * l'approccio standard con uno spazio di outcome e una *famiglia di misure di probabilità*. In tal modo si segue l'approccio standard della teoria operativa, ma i risultati dei lemmi 3.3 e 3.6 saranno da imporre a livello di postulati e non saranno possibili le speculazioni sul free will (non ha proprio senso parlarne in un framework che non prevede le probabilità di fare un esperimento piuttosto che un altro),
- * lo spazio campionario viene allargato in modo da considerare le possibili scelte degli sperimentatori e viene definita un'unica *misura di probabilità* su tutto lo spazio; così facendo si introduce un concetto non operativo che è la probabilità stessa di

Estensione dell'approccio standard

Gli approcci possibili

fare un esperimento, ma ciò permetterà di procedere con le dimostrazioni dei due lemmi e fare alcune considerazioni sul free will.

Consideriamo quindi un insieme $\Upsilon_{\underline{\rho}}$ i cui elementi siano dei test preparativi $\underline{\rho}^{(i)}$ parametrizzati da $i \in \Gamma_{\underline{\rho}}$. Supponiamo di considerare un numero finito di test evitando così i dettagli sull'esistenza o meno di funzioni di probabilità σ -additive. Analogamente definiamo $\Upsilon_{\underline{a}} \doteq \{\underline{a}^{(j)}\}_{j \in \Gamma_{\underline{a}}}$ con ovvio significato dei simboli, e supponiamo che $|\Gamma_{\underline{a}}| < +\infty$. Definiamo quindi lo spazio di probabilità discreto (Ψ, \mathbb{P}) , dove

$$\Psi \doteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \Upsilon_{\underline{\rho}} \times \Upsilon_{\underline{a}}$$

$$\mathbb{P}(\{(i, j, \underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)})\}) \doteq \mathbb{P}_{\underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)}}(i, j) \times \mathbb{P}_{SO}(\underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)})$$

dove $\mathbb{P}_{\underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)}}$ è quella di eq.(3.1) e \mathbb{P}_{SO} è la probabilità che un super-osservatore esterno attribuirebbe alla scelta di ogni singolo esperimento. La definizione precedente è compatibile con le probabilità della teoria operativa: ricordando che la probabilità condizionata $\Pr[A | B]$, con A e B due eventi,³ è $\Pr[A | B] \doteq \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$, e definendo le abbreviazioni

$$i, j \doteq \{(i, j)\} \times \Upsilon_{\underline{\rho}} \times \Upsilon_{\underline{a}} \tag{3.2}$$

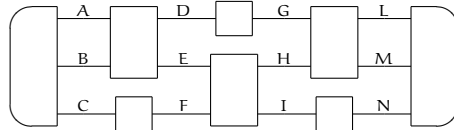
$$\underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)} \doteq \{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i^{(n)} \in \underline{\rho}^{(n)}\} \times \{j \in \mathbb{N} \mid a_j^{(m)} \in \underline{a}^{(m)}\} \times \{(\underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)})\} \tag{3.3}$$

si ottiene che

$$\mathbb{P}(i, j \mid \underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)}) \doteq \frac{\mathbb{P}(i, j \cap \underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)})}{\mathbb{P}(\underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)})} = \frac{\mathbb{P}(\{(i, j, \underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)})\})}{\mathbb{P}_{SO}(\underline{\rho}^{(n)}, \underline{a}^{(m)})}$$

È chiaro che quanto finora esposto non è stato applicato ad una teoria operativa nel suo complesso, bensì ad un determinato gruppo di circuiti, in particolare a tutti quei circuiti del tipo (effetto | stato) in cui gli stati e gli effetti in gioco possono essere scelti da dei predeterminati set Υ di cardinalità finita. Tale approccio verrà mantenuto anche nel seguito: i risultati non saranno attribuibili alla teoria operativa, ma a quello che sarà chiamato un *modello operativo* (o *modello empirico*). Chiaramente qualsiasi risultato attribuito ad un modello operativo si riflette su qualunque teoria operativa in grado di riprodurre tale modello: i.e., se un modello non è localmente realista, così una qualunque teoria operativa in grado di riprodurre quel modello non sarà localmente realista. Si cercherà ora di formalizzare quanto esposto, iniziando a generalizzare la classe di circuiti considerati nell'esempio precedente.

Un circuito prima ancora di essere definito da test presenti, è caratterizzato dai collegamenti: è la particolare successione dei sistemi in gioco che costituisce la prima grande differenziazione fra i vari circuiti. Un possibile esempio di collegamento può essere il seguente:



Una volta identificati i sistemi e il modo in cui questi si collegano fra loro, lo sperimentatore dovrà scegliere i vari test da inserire: e.g., selezionare un test preparativo per il sistema ABC, etc. Si ipotizzi che tale scelta non sia fatta sulla totalità dei possibili test, bensì su un sottoinsieme ristretto che si suppone finito:⁴ i.e., per il sistema ABC potrà essere scelto un test da un determinato insieme finito $\Upsilon_{\underline{\rho}_{ABC}}$.

³ Cioè due sottoinsiemi della σ -algebra dello spazio di probabilità considerato, che nel caso di spazio discreto coincide con l'insieme delle parti dello spazio campionario

⁴ Questa restrizione, in particolare sulla finitezza, viene fatta per potersi riagganciare al formalismo introdotto precedentemente dove gli insiemi Υ sono stati considerati finiti, al fine di avere spazi di probabilità così semplici da riuscire sempre a definire una misura di probabilità.

Equivalenza tra i due approcci

Estensione del formalismo a più sistemi

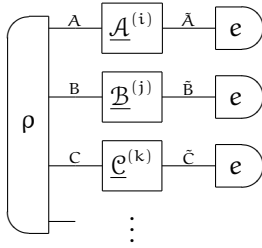
Modello di un circuito

Assegnare un modello di circuito, assegnare un modello operativo, o in senso lato assegnare un modello empirico significa definire tutti i sistemi presenti nel circuito, i relativi collegamenti, e stabilire quali sono i possibili test da inserire nel circuito. Un modello operativo sarà rappresentato pittoricamente in maniera analoga ad un circuito, con la differenza che nei box non verranno specificati i test, bensì i set dai quali i test potranno essere scelti.

3.1.1 Il framework

Si consideri un esperimento costituito da un test preparativo multipartito condiviso da più sperimentatori, ognuno dei quali sul proprio sottosistema può eseguire un test arbitrariamente scelto da un elenco prefissato finito. La preparazione sia univoca e costituita da un test deterministico $\underline{\rho} \doteq \{|\rho\rangle\}$. Contrariamente all'esempio introduttivo precedente in questo caso la preparazione è univoca; questa restrizione non sarà limitante per gli sviluppi che seguiranno: i vari risultati/teoremi infatti prevedono sempre che la libertà degli sperimentatori sia sulla scelta dei test del proprio sottosistema, e non sulla preparazione dello stato condiviso. Si chiede pertanto formalmente di considerare il seguente modello operativo:

Ipotesi di lavoro



dove

- * $\underline{\mathcal{A}} \doteq \{\mathcal{A}_n^{(i)}\}_{n \in \Gamma_{\underline{\mathcal{A}}}}$ con $\mathcal{A}_n^{(i)} \in \mathfrak{T}(A, \bar{A})$, $i \in \Gamma_{\underline{\mathcal{A}}} \subset \mathbb{N}$ e $|\Gamma_{\underline{\mathcal{A}}}| < +\infty$;
- * $\underline{\mathcal{B}} \doteq \{\mathcal{B}_n^{(j)}\}_{n \in \Gamma_{\underline{\mathcal{B}}}}$ con $\mathcal{B}_n^{(j)} \in \mathfrak{T}(B, \bar{B})$, $j \in \Gamma_{\underline{\mathcal{B}}} \subset \mathbb{N}$ e $|\Gamma_{\underline{\mathcal{B}}}| < +\infty$;
- * $\underline{\mathcal{C}} \doteq \{\mathcal{C}_n^{(k)}\}_{n \in \Gamma_{\underline{\mathcal{C}}}}$ con $\mathcal{C}_n^{(k)} \in \mathfrak{T}(C, \bar{C})$, $k \in \Gamma_{\underline{\mathcal{C}}} \subset \mathbb{N}$ e $|\Gamma_{\underline{\mathcal{C}}}| < +\infty$;

e così via per gli altri test. Venga quindi definito il seguente insieme:

$$\Psi \doteq \mathbb{N}_{\underline{\mathcal{A}}} \times \mathbb{N}_{\underline{\mathcal{B}}} \times \mathbb{N}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \dots \times \times \bigcup_{i \in \Gamma_{\underline{\mathcal{A}}}} \{\underline{\mathcal{A}}^{(i)}\} \times \bigcup_{j \in \Gamma_{\underline{\mathcal{B}}}} \{\underline{\mathcal{B}}^{(j)}\} \times \bigcup_{k \in \Gamma_{\underline{\mathcal{C}}}} \{\underline{\mathcal{C}}^{(k)}\} \times \dots \times \quad (3.4)$$

dove gli insiemi naturali della prima riga identificano gli spazi degli outcome dei vari esperimenti, quelli della seconda sono invece i set i cui elementi sono i test che è possibile eseguire su ogni sottosistema (sono cioè gli Υ definiti precedentemente nell'esempio introduttivo).

Definizione 3.1 (Modello empirico [7]). *Un modello empirico è una coppia (Ψ, Pr) , dove Pr è una misura di probabilità sullo spazio Ψ di eq.(3.4).*

I modelli empirici/operazionali e i modelli a variabili nascoste

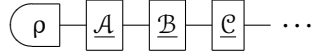
Si introduca ora lo spazio Λ dove vivono le variabili nascoste λ e lo si consideri numerabile e limitato. In linea di principio tale richiesta è senz'alcun ombra di dubbio limitante, ma evita di dover affrontare questioni inerenti la misurabilità dello spazio Λ . Si definisca quindi lo spazio Ω come il prodotto $\Psi \times \Lambda$ e venga data la seguente definizione di modello a variabili nascoste:

Definizione 3.2 (Modello a variabili nascoste [7]). *Un modello a variabili nascoste è una coppia Ω, \Pr_λ , dove \Pr_λ è una misura di probabilità sullo spazio Ω .*

Notazione. In seguito verrà adottata la seguente convezione sulla notazione: fermo restando che valgono delle abbreviazioni analoghe alle 3.2-3.3, per sottolineare che l'outcome i è da riferirsi al test \underline{A} verrà fatto il seguente abuso di notazione: \mathcal{A}_i indicherà sia l'outcome i -esimo del test \underline{A} (e cioè $i \in \mathbb{N}$), sia l'evento $\mathcal{A}_i \in \underline{A}$. Pertanto

$$\Pr[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots] \doteq \Pr[i, j, k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots]$$

Sarà inoltre necessario talvolta fare riferimento a test non commutanti su uno stato, specialmente quando si toccherà il concetto della causalità: in tali casi si deve immaginare che lo stato ρ sia di sistema singolo e che i test siano definiti in modo tale da consentirne la composizione. In questi casi lo spazio Ψ non verrà esplicitamente costruito. Per rimarcare che i test non commutano, nelle probabilità anzichè separarli da virgola verranno separati dal simbolo \circ , proprio per indicare la composizione ordinata; pertanto, per dei test $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots$, generalmente non commutanti su $|\rho\rangle$, eseguiti nell'ordine rappresentato dal seguente circuito:



vale la seguente scrittura:

$$\Pr[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k, \dots | \dots \circ \underline{C} \circ \underline{B} \circ \underline{A}] \doteq \Pr[i, j, k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots]$$

Equivalenza fra modelli

Dal momento che in seguito sarà necessario confrontare modelli a variabili nascoste fra loro e con con modelli empirici, è necessario dare una definizione ragionevole di *equivalenza tra modelli* in modo da rendere significativo ogni tentativo di raffronto.

Definizione 3.3 (Equivalenza empirica tra un modello a variabili nascoste e un modello empirico [7]). *Dati un modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) e un modello empirico (Ψ, \Pr) questi vengono detti empiricamente equivalenti se $\forall i, j, k, \dots \in \mathbb{N}$ e $\forall \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots$ si ha*

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots] = \Pr[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots] \quad (3.5)$$

La condizione sull'uguaglianza implica che i due modelli diano le stesse previsioni a livello di probabilità condizionate dal setting dell'esperimento. Si ricorda che tali probabilità sono le uniche che hanno senso in un modello operativo, pertanto un eventuale confronto può essere effettuato solo su queste. Le probabilità condizionate del modello a variabili nascoste di eq.(3.5) vengono calcolate nel modo seguente:⁵

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots] = \sum_{\lambda} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots]$$

In altre parole la condizione di equivalenza di eq.(3.5) mostra come le probabilità condizionate della teoria empirica vengano riprodotte dal modello a variabili nascoste tramite una media.

Definizione 3.4 (Equivalenza empirica tra modelli a variabili nascoste [7]). *Due modelli a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) e $(\Omega, \Pr_{\bar{\lambda}})$ vengono detti empiricamente equivalenti quando $\forall i, j, k, \dots \in \mathbb{N}$, $\forall \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots$ si ha*

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots] = \Pr_{\bar{\lambda}}[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots]$$

⁵ $\Pr[A | B] = \sum_C \Pr[A | B, C] \times \Pr[C | B]$

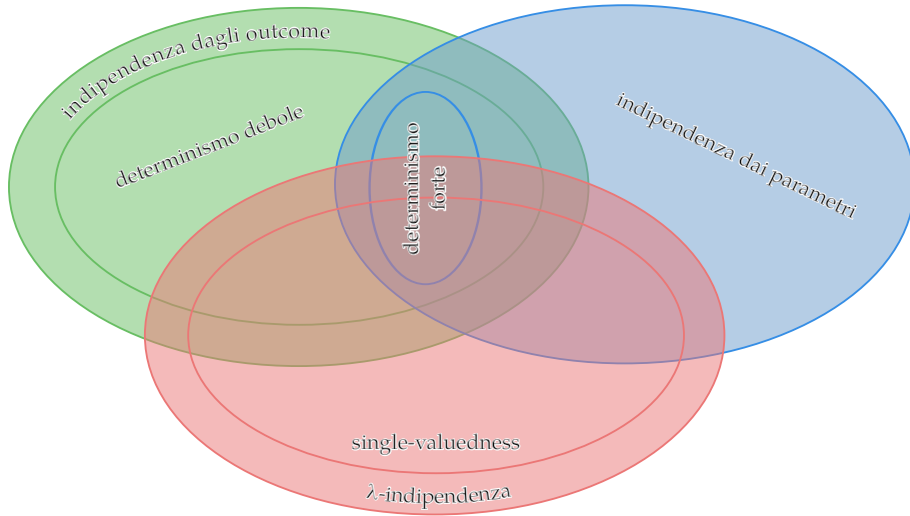


Figura 4.: Rappresentazione schematica della relazione fra le varie proprietà di un modello a variabili nascoste.

Si sottolinea che quanto si è richiesto è l'*equivalenza empirica*, cioè che per ogni esperimento entrambi i modelli riproducano le stesse probabilità condizionate mediate sulla distribuzione delle variabile nascoste.

3.1.2 λ-indipendenza e single-valuedness

Definizione 3.5 (Single-valuedness [7]). *Un modello a variabili nascoste gode della proprietà di single-valuedness se Λ contiene un solo elemento.*

La single-valuedness implica che per ogni stato la variabile nascosta possa assumere un solo valore. Come si intuisce tale proprietà impedisce di fatto l'esistenza di un modello a variabili nascoste, ma nonostante ciò la definizione precedente è utile al fine di riformulare il paradosso EPR.

Lemma 3.1 ([7]). *Dato un modello empirico (Ψ, Pr) esiste sempre un modello a variabili nascoste $(\Psi, \text{Pr}_\lambda)$ equivalente con proprietà di single-valuedness.*

Dimostrazione. Basta imporre $\Lambda \doteq \{\lambda_0\}$ e per ogni $i, j, k, \dots \in \mathbb{N}$ e per ogni $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots$

$$\begin{aligned} \text{Pr}_\lambda[A_i, B_j, C_k, \dots, \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots] &\equiv \text{Pr}_\lambda[A_i, B_j, C_k, \dots, \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots, \lambda] \doteq \\ &\doteq \text{Pr}[A_i, B_j, C_k, \dots, \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots] \quad \square \end{aligned}$$

L'immediato risultato precedente formalizza il concetto intuitivo per il quale un qualunque modello empirico può essere considerato un modello a variabili nascoste equivalente a se stesso, in cui la variabile nascosta è proprio lo stato.

Definizione 3.6 (Non-realismo). *Un modello empirico non è realista se tutti i modelli a variabili nascoste equivalenti hanno la proprietà di single-valuedness.*

Il non-realismo in un framework realista

Ora si vedrà una delle definizioni più importanti.

Definizione 3.7 (λ-indipendenza). *Si dice che un modello a variabili nascoste gode della proprietà λ-indipendenza se*

$$\text{Pr}_\lambda[\lambda \mid \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots] = \text{Pr}_\lambda[\lambda \mid \underline{A}', \underline{B}', \underline{C}', \dots]$$

per ogni $\lambda, \underline{A}, \underline{A}', \underline{B}, \underline{B}', \underline{C}, \underline{C}'$.

λ-indipendenza

La λ -indipendenza è la proprietà per la quale la distribuzione di probabilità di un variabile nascosta dipende solamente dallo stato a cui fa riferimento ed è totalmente indipendente dai test che verranno eseguiti in seguito, pertanto:

$$\Pr_\lambda[\lambda \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots] \equiv \Pr_\lambda[\lambda]$$

A volte per sottolineare che la distribuzione $\Pr_\lambda[\lambda]$ dipende solamente da $|\rho\rangle$ si scriverà esplicitamente $\Pr_\lambda[\lambda \mid \rho]$.

Tal proprietà esprime quella che è una causalità per la variabile nascosta: la sua distribuzione non dipende dalla scelta di un esperimento causalmente successiva alla sua creazione. In un certo senso può essere considerata il parallelo per un modello a variabili nascoste della proprietà di causalità di una teoria operativa espressa nella forma di definizione 2.20. La prossima definizione può invece essere considerata un parallelo della definizione 2.21, ovvero la caratterizzazione alternativa di causalità.

λ -causalità **Definizione 3.8** (λ -causalità). *Un modello a variabili nascoste gode della proprietà di λ -causalità se*

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{C}} \circ \underline{\mathcal{B}} \circ \underline{\mathcal{A}}, \lambda] = \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{C}}' \circ \underline{\mathcal{B}}' \circ \underline{\mathcal{A}}, \lambda]$$

per ogni $\lambda, \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{B}}', \underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{C}}'$.

Si sottolinea che la definizione precedente fa riferimento ad un solo sistema su cui agisce una cascata di test, fra loro generalmente non commutanti.

Nonostante le somiglianze tra le definizioni di λ -indipendenza e di causalità 2.20 da un lato, e tra quelle di λ -causalità e di causalità 2.21 dall'altro, non è possibile mettere in relazione la λ -indipendenza con la λ -causalità, contrariamente a quanto si riesce a dimostrare con le due definizioni di causalità per una teoria operativa. Quello che si può mostrare è invece il lemma seguente

Lemma 3.2. *Per un modello a variabili nascoste che gode di λ -indipendenza e di λ -causalità vale la seguente relazione: per ogni $\underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{B}}'$ – in generale non commutanti fra loro sullo stesso stato $|\rho\rangle$ – e per ogni $\mathcal{A}_i \in \underline{\mathcal{A}}$, risulta che:*

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}} \circ \underline{\mathcal{A}}] = \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}}' \circ \underline{\mathcal{A}}] \quad (3.6)$$

La eq.(3.6) è detta condizione di causalità empirica per il modello a variabili nascoste.

Dimostrazione. Per definizione

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}} \circ \underline{\mathcal{A}}] \doteq \sum_{\lambda} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}} \circ \underline{\mathcal{A}}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}} \circ \underline{\mathcal{A}}]$$

Ma $\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}} \circ \underline{\mathcal{A}}] = \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}}' \circ \underline{\mathcal{A}}]$ per λ -causalità, e $\Pr_\lambda[\lambda \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}} \circ \underline{\mathcal{A}}] = \Pr_\lambda[\lambda \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}}' \circ \underline{\mathcal{A}}]$ per λ -indipendenza. Pertanto

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}} \circ \underline{\mathcal{A}}] &= \\ &= \sum_{\lambda} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}}' \circ \underline{\mathcal{A}}] \times \Pr_\lambda[\lambda \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}}' \circ \underline{\mathcal{A}}] \equiv \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i \mid \dots \circ \underline{\mathcal{B}}' \circ \underline{\mathcal{A}}] \end{aligned}$$

□

Le proprietà di single-valuedness e di λ -indipendenza sono collegate, infatti è banale verificare che vale la seguente

Nota (Single-valuedness Vs λ -indipendenza [7]). Un modello a variabili nascoste che soddisfa la single-valuedness soddisfa anche la λ -indipendenza.

3.1.3 Determinismo debole, forte e indipendenza dagli outcome

Un modello a variabili nascoste non deve essere necessariamente deterministico affinché possa essere considerato significativo nel programma dell'interpretazione a variabili nascoste. Come esposto nell'introduzione l'obiettivo è riuscire a trovare un modello in grado di superare alcuni dei limiti della meccanica quantistica e non necessariamente tutti. Uno di questi è l'*indeterminismo*.

Una teoria a variabili nascoste deterministica riflette il concetto per il quale l'indeterminismo della meccanica quantistica è solamente dovuto all'ignoranza dello sperimentatore sugli stati che è in grado di preparare. È però opportuno distinguerne due tipi: uno *debole* e uno *forte*.

Definizione 3.9 (Determinismo forte [7]). *Un modello a variabili nascoste soddisfa il determinismo forte se per ogni collezione di test $\underline{A} \doteq \{A_i\}_{i \in \eta}$, $\underline{B} \doteq \{B_j\}_{j \in \chi}$, $\underline{C} \doteq \{C_k\}_{k \in \xi}$, ... e ogni $\lambda \in \Lambda$, si ha che:*

Determinismo forte e debole

$$\begin{array}{ll} \exists i \in \eta & \text{tale che } \Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \lambda] = 1; \\ \exists j \in \chi & \text{tale che } \Pr_\lambda[B_j | \underline{B}, \lambda] = 1; \\ \exists k \in \xi & \text{tale che } \Pr_\lambda[C_k | \underline{C}, \lambda] = 1; \end{array}$$

e così via.

Definizione 3.10 (Determinismo debole [7]). *Un modello a variabili nascoste soddisfa il determinismo debole se per ogni collezione di test $\underline{A} \doteq \{A_i\}_{i \in \eta}$, $\underline{B} \doteq \{B_j\}_{j \in \chi}$, $\underline{C} \doteq \{C_k\}_{k \in \xi}$, ... e ogni $\lambda \in \Lambda$, si ha che:*

$$\exists i \in \eta, j \in \chi, k \in \xi, \dots : \Pr_\lambda[A_i, B_j, C_k, \dots | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots, \lambda] = 1$$

La differenza tra i due tipi di determinismo è sostanziale: mentre il determinismo debole assicura che la conoscenza della variabile nascosta e l'insieme di tutte le misurazioni permette di asserire con certezza l'outcome di ogni singolo test, quello forte rafforza il risultato affermando che tale sicurezza si ha a prescindere dalla conoscenza di tutto l'insieme delle misurazioni. Il determinismo forte pertanto prescrive un determinismo a livello di singola misura, quello debole invece a livello dell'intero set di test. Verrà ora dimostrato uno dei lemmi per il quale è stato introdotto il formalismo con le probabilità a priori sulla scelta dei test.

Analogie e differenze fra i concetti di determinismo debole e forte

Lemma 3.3 (Determinismo forte Vs determinismo debole [7]). *Un modello a variabili nascoste che soddisfa il determinismo forte soddisfa anche il determinismo debole.*

Un lemma ragionevole - parte 1

Dimostrazione. Per ipotesi vale il determinismo forte, pertanto esistono i, j, k tali che $\Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \lambda] = 1$, $\Pr_\lambda[B_j | \underline{B}, \lambda] = 1$, $\Pr_\lambda[C_k | \underline{C}, \lambda] = 1$, ... Notando che dati una serie di eventi $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_n$, tali che $\Pr[\bigcap_i F_i] > 0$ e $\Pr[E_i | F_i] = 1$ per ogni i , allora $\Pr[\bigcap_i E_i | \bigcap_i F_i] = 1$,⁶ si conclude immediatamente con la tesi del lemma. \square

Il formalismo introdotto per procedere alla dimostrazione è dovuto alla necessità di dover considerare un'unica misura di probabilità su tutto lo spazio; mentre con una famiglia di misure di probabilità non sarebbe stato possibile affermare che

$$\Pr[E_i | F_i] = 1 \quad \forall i \quad \implies \quad \Pr[\bigcap_i E_i | \bigcap_i F_i] = 1$$

visto che le varie $\Pr[E_i | F_i]$ sarebbero state misure di probabilità fra loro differenti.

La proprietà di determinismo debole può essere messa in relazione con la seguente.

Indipendenza dagli outcome

Definizione 3.11 (Indipendenza dagli outcome [7]). *Un modello a variabili nascoste soddisfa la proprietà di indipendenza dagli outcome se $\forall A_i \in \underline{\mathcal{A}}, \forall B_j \in \underline{\mathcal{B}}, \forall C_k \in \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda$, si ha:*

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, B_j, C_k, \dots, \lambda] &= \Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda]; \\ \Pr_\lambda[B_j | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, A_i, C_k, \dots, \lambda] &= \Pr_\lambda[B_j | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda]; \\ \Pr_\lambda[C_k | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, A_i, B_j, \dots, \lambda] &= \Pr_\lambda[C_k | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda]; \end{aligned}$$

e così via.

Quest'ultima proprietà mostra come in un setting di misurazioni il risultato di una misura a livello di modello a variabili nascoste può dipendere dalla scelta delle altre misure, ma non dai loro outcome. È possibile dare una caratterizzazione alternativa della proprietà di indipendenza dagli outcome.

Lemma 3.4 (Caratterizzazione della proprietà di indipendenza dagli outcome [7]). *Un modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) soddisfa la proprietà di indipendenza dagli outcome se e solo se se $\forall A_i \in \underline{\mathcal{A}}, \forall B_j \in \underline{\mathcal{B}}, \forall C_k \in \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda$ si ha che:*

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[A_i, B_j, C_k, \dots | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] &= \\ \Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] \times \Pr_\lambda[B_j | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] \times \Pr_\lambda[C_k | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] \times \dots \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si veda il teorema 9.2.1 di Chung, K. L., *A Course in Probability Theory*, II edizione, Academic Press, 1974. \square

Come preannunciato l'indipendenza dagli outcome è collegata con il determinismo debole, infatti:

Lemma 3.5 (Determinismo debole Vs indipendenza dagli outcome [7]). *Se un modello a variabili nascoste soddisfa il determinismo debole allora soddisfa anche la proprietà di indipendenza dagli outcome.*

Dimostrazione. Dato che per ipotesi vale la proprietà di determinismo debole esiste una ennupla $(A_{i_0}, B_{j_0}, C_{k_0}, \dots)$ tale che la probabilità $\Pr_\lambda[A_i, B_j, C_k, \dots | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda]$ possa essere scritta nel modo seguente:

$$\Pr_\lambda[A_i, B_j, C_k, \dots | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] = \chi_{A_{i_0}}(A_i) \times \chi_{B_{j_0}}(B_j) \times \chi_{C_{k_0}}(C_k) \times \dots$$

dove $\chi_y(x)$ è definita come:

$$\chi_y : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\} \tag{3.7}$$

$$x \longmapsto \chi_y(x) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } x = y; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] &= \chi_{A_{i_0}}(A_i); \\ \Pr_\lambda[B_j | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] &= \chi_{B_{j_0}}(B_j); \\ \Pr_\lambda[C_k | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] &= \chi_{C_{k_0}}(C_k); \end{aligned}$$

e così via. Ma per quanto visto nel lemma precedente l'esistenza di una fattorizzazione del genere implica la proprietà di indipendenza dagli outcome. \square

⁶ Tale risultato può essere compreso nei seguenti termini: dire che $\Pr[E_i | F_i] = 1$ per ogni i , vuole dire che ogni set F_i è incluso in E_i . Ma se questo è vero per ogni i allora l'intersezione $\bigcap_i F_i$ è anch'essa inclusa completamente in $\bigcap_i E_i$.

3.1.4 Indipendenza dai parametri

La proprietà di indipendenza dagli outcome enunciata precedentemente mostra l'assenza di un'influenza (per lo meno a livello probabilistico) tra i vari outcome di vari test fra loro, ma non prescrive nulla per quanto riguarda i test in sè. Verrà ora mostrata una proprietà che pone dei limiti anche su quest'ultimo fatto.

Definizione 3.12 (Indipendenza dai parametri [7]). *Un modello a variabili nascoste (Ψ, \Pr_λ) soddisfa la proprietà di indipendenza dai parametri se per ogni collezione di test $\underline{A} \doteq \{A_i\}_{i \in \eta}$, $\underline{B} \doteq \{B_j\}_{j \in \chi}$, $\underline{C} \doteq \{C_k\}_{k \in \xi}$, ... e ogni $\lambda \in \Lambda$, si ha che:*

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots, \lambda] &= \Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \lambda] & \forall i \in \eta \\ \Pr_\lambda[B_j | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots, \lambda] &= \Pr_\lambda[B_j | \underline{B}, \lambda] & \forall j \in \chi \\ \Pr_\lambda[C_k | \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \dots, \lambda] &= \Pr_\lambda[C_k | \underline{C}, \lambda] & \forall k \in \xi \end{aligned}$$

e così via.

Il determinismo forte enunciato precedentemente è legato oltre che all'indipendenza dagli outcome, anche all'indipendenza dai parametri, infatti vale il seguente:

Lemma 3.6 (Determinismo forte Vs indipendenza dai parametri [7]). *Un modello a variabili nascoste che soddisfa la proprietà di determinismo forte soddisfa anche quella di indipendenza dai parametri.*

Un lemma ragionevole - parte 2

Dimostrazione. Per determinismo forte esiste un $i_0 \in \eta$ tale che $\Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \lambda] = \chi_{A_{i_0}}(A_i)$ dove $\chi_y(x)$ è la funzione definita in eq.(3.7). Dal momento che $\Pr_\lambda[A_{i_0} | \underline{A}, \lambda] = 1$, si ha che:

$$\Pr_\lambda[A_{i_0}, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] = {}^7 \Pr_\lambda[\underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] \quad (3.9)$$

Per $i \neq i_0$ si ha che $0 = \Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \lambda] = \sum_{\underline{B}, \underline{C}, \dots} \Pr_\lambda[A_i, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda]$, cioè per ogni test $\underline{B}, \underline{C}, \dots$:

$$\Pr_\lambda[A_i, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] = 0$$

⁷ $\Pr_\lambda[A_{i_0} | \underline{A}, \lambda]$ può essere riscritto nel modo seguente

$$\Pr_\lambda[A_{i_0} | \underline{A}, \lambda] = \sum_{\underline{B}, \underline{C}, \dots} \Pr_\lambda[A_{i_0}, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda]$$

Visto che per ipotesi vale il determinismo forte, tale quantità è uguale a 1. Vale inoltre l'uguaglianza:

$$\sum_{\underline{B}, \underline{C}, \dots} \Pr_\lambda[A_{i_0}, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] = \sum_{\underline{B}, \underline{C}, \dots} \Pr_\lambda[\underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda]$$

Visto che $\Pr_\lambda[\underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] = \sum_{i \in \eta} \Pr_\lambda[A_i, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda]$ si ricava che

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{B}, \underline{C}, \dots} \left[\sum_{i \in \eta \setminus \{i_0\}} \Pr_\lambda[A_i, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] + \Pr_\lambda[A_{i_0}, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] - \right. \\ \left. \Pr_\lambda[A_{i_0}, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] \right] = \sum_{\underline{B}, \underline{C}, \dots} \sum_{i \in \eta \setminus \{i_0\}} \Pr_\lambda[A_i, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] = 0 \end{aligned}$$

Questo implica che $\forall i \in \eta \setminus \{i_0\}, \forall \underline{B}, \underline{C}, \dots \Pr_\lambda[A_i, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] = 0$. Concludendo quindi vale la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[\underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] &= \Pr_\lambda[A_{i_0}, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] + \underbrace{\sum_{i \in \eta \setminus \{i_0\}} \Pr_\lambda[A_i, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda]}_0 \\ &= \Pr_\lambda[A_{i_0}, \underline{B}, \underline{C}, \dots | \underline{A}, \lambda] \end{aligned}$$

Visto che:

$$\Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] = \frac{\Pr_\lambda[A_i, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots | \underline{\mathcal{A}}, \lambda]}{\Pr_\lambda[\underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots | \underline{\mathcal{A}}, \lambda]}$$

per quanto si è appena visto si ha che $\Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] = \chi_{\mathcal{A}_i}(\mathcal{A}_i)$. \square

La dimostrazione di quest'ultimo risultato necessita che in eq.(3.9) si sia in grado di definire la probabilità $\Pr_\lambda[\underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots | \underline{\mathcal{A}}, \lambda]$, cioè una probabilità di scelta dei test. Risulta pertanto chiaro che è possibile dimostrare il lemma precedente solamente sotto l'assunzione citata all'inizio del capitolo.

3.1.5 Località

Il concetto di *località* è senz'altro uno dei più pervasivi di tutta la letteratura scientifica da quasi un secolo. Nonostante ciò una definizione matematica convincente non è stata data fino al 1964 da J. Bell [5].

Definizione 3.13 (Località [7]). *Un modello a variabili nascoste soddisfa la proprietà di località se $\forall \mathcal{A}_i \in \underline{\mathcal{A}}, \forall \mathcal{B}_j \in \underline{\mathcal{B}}, \forall \mathcal{C}_k \in \underline{\mathcal{C}}, \dots, \forall \lambda$, si ha:*

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] = \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\mathcal{B}_j | \underline{\mathcal{B}}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\mathcal{C}_k | \underline{\mathcal{C}}, \lambda] \times \dots \quad (3.10)$$

La proprietà di località può essere riformulata in funzione delle proprietà enunciate precedentemente.

Lemma 3.7 (Caratterizzazione alternativa della località [26]). *Un modello a variabili nascoste è locale se e solo se soddisfa l'indipendenza dagli outcome e dai parametri.*

Dimostrazione. Usando la definizione di indipendenza dei parametri nella caratterizzazione della proprietà di indipendenza dagli outcome del lemma 3.4 si ottiene subito la definizione di località.

D'altro canto, se vale la località, vale anche che:

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] &= \sum_{\substack{j \in \mathcal{X} \\ k \in \mathcal{E} \\ \dots}} \Pr_\lambda[A_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_k | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda] = \\ &= \sum_{\substack{j \in \mathcal{X} \\ k \in \mathcal{E} \\ \dots}} \Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\mathcal{B}_j | \underline{\mathcal{B}}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\mathcal{C}_k | \underline{\mathcal{C}}, \lambda] \times \dots = \Pr_\lambda[A_i | \underline{\mathcal{A}}, \lambda] \end{aligned}$$

e analogamente per $\Pr_\lambda[\mathcal{B}_j | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda]$, $\Pr_\lambda[\mathcal{C}_k | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \lambda]$, \dots , dimostrando così l'indipendenza dai parametri. Usando ora la definizione di indipendenza dei parametri (che abbiamo appena dimostrato valere nel caso sia rispettata la località) nella definizione di località si ottiene il risultato del lemma 3.4. \square

3.2 TEOREMI NO-GO

In fisica teorica un *teorema no-go* è un teorema che identifica una situazione non realizzabile: in particolare l'espressione *no-go* caratterizza quella categoria di teoremi che riescono a dare dei vincoli sulle proprietà che possono avere alcuni elementi di una teoria. Un celeberrimo teorema no-go nell'ambito della *quantum information* è ad esempio il teorema del no-cloning. Per quanto invece concerne l'argomento variabili nascoste applicato alla

La località come unione delle proprietà di indipendenza dagli outcome e dai parametri

meccanica quantistica alcuni dei teoremi più famosi sono l'argomento EPR e il teorema di Bell.

Quello che si vuol fare ora è ripresentare degli analoghi di tali teoremi per il framework introdotto precedentemente. Verranno pertanto presentate alcune misure di probabilità per modelli empirici che, a seconda dei casi, non consentono una serie di proprietà per dei modelli a variabili nascoste equivalenti. Tali risultati sono considerati i paralleli dei teoremi precedenti nel framework introdotto in questo capitolo, poichè le varie proprietà che vengono escluse di volta in volta sono proprio quelle escluse dagli omonimi argomenti.

L'aspetto interessante di questi teoremi è che, mostrando esplicitamente come devono essere le probabilità dei modelli empirici, identificano un punto di partenza chiaro per un successivo sviluppo che voglia identificare le caratteristiche che una teoria operativa deve avere per presentare tali accoppiamenti tra alcuni dei suoi stati ed effetti. Le riformulazioni che si stanno per proporre (e che per brevità chiameremo teoremi di Bell, ed EPR per sottolineare le analogie) sono sempre dovute a A. Brandenburger e N. Yanofsky. [7]

L'utilità dei teoremi no-go

3.2.1 Il paradosso EPR

Il paradosso EPR nella sua formulazione originaria risultava piuttosto differente rispetto al linguaggio che è stato qui utilizzato. Nonostante ciò è possibile parafrasarlo parzialmente nel modo seguente: [30] la meccanica quantistica non può essere considerata completa e localmente realista. Secondo Einstein, Podolsky e Rosen affermare che la meccanica quantistica è completa significa dire che la funzione d'onda Ψ di un sistema non solo è la massima possibile descrizione che la teoria quantistica permette di un sistema fisico (cioè quello che la teoria considera uno stato), bensì è anche la massima possibile descrizione in linea di principio. In altre parole affermare che una teoria probabilistica è completa è equivalente ad affermare che non ammette modelli a variabili nascoste equivalenti che non siano triviali. Come si è già avuto modo di dire un modello a variabili nascoste è triviale se di fatto non fornisce alcuna informazione aggiuntiva alla descrizione permessa dal modello empirico, e questo si verifica quando di fatto la variabile nascosta può assumere un solo valore. Affermare pertanto che una teoria probabilistica è completa è equivalente a dire che gli unici modelli a variabili nascoste equivalenti devono soddisfare la proprietà di single-valuedness. Per quanto riguarda invece la località si sa dal lemma 3.7 che tale proprietà può essere vista come la congiunzione della richiesta di indipendenza dai parametri e di indipendenza dagli outcome.

Il paradosso EPR può quindi essere riformulato nel modo seguente: la meccanica quantistica è un modello empirico per il quale non esiste un modello a variabili nascoste equivalente che soddisfa la single-valuedness, l'indipendenza dai parametri e l'indipendenza dagli outcome. Quello che verrà ora proposto è una versione meno restrittiva rispetto all'argomento originario di Einstein Podolsky e Rosen, dal momento che non fa alcuna richiesta sulla proprietà di indipendenza dai parametri.

Il paradosso EPR riformulato nel linguaggio del framework introdotto

Teorema 3.1 (EPR [7]). *Esiste un modello empirico (Ψ, Pr) per una teoria operativa per il quale non è possibile costruire un modello a variabili nascoste $(\Omega, \text{Pr}_\lambda)$ che soddisfa la proprietà di single-valuedness e di indipendenza dagli outcome.*

Dimostrazione. Sia ρ uno stato normalizzato del sistema AB e siano $\underline{A} \doteq \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \{0,1\}}$ e $\underline{B} \doteq \{\mathcal{B}_i\}_{i \in \{0,1\}}$ due test osservativi dicotomici, rispettivamente per il sistema A e per il sistema B. Sia pertanto definito l'insieme Ψ dell'eq.(3.4):

$$\Psi \doteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{\underline{A}\} \times \{\underline{B}\}$$

La misura di probabilità Pr su Ψ sia definita nel modo seguente:

	\mathcal{B}_0	\mathcal{B}_1
\mathcal{A}_0	0	1/2
\mathcal{A}_1	1/2	0

Si supponga per assurdo che esista un modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) che soddisfa le proprietà di single-valuedness e di indipendenza dagli outcome. Posto $\Lambda \doteq \{\lambda_0\}$ è quindi necessario che

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] = \Pr_\lambda[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_0 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] = \frac{1}{2}$$

Dall'uguaglianza precedente si ricava che

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_0 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= \Pr_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] + \Pr_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] = 0 + \frac{1}{2} \\ \Pr_\lambda[\mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= \Pr_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] + \Pr_\lambda[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] = \frac{1}{2} + 0 \end{aligned}$$

e grazie a queste che

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_0 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \mathcal{B}_1, \lambda_0] = \frac{\Pr_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0]}{\Pr_\lambda[\mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0]} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

contraddicendo l'ipotesi di indipendenza dagli outcome. \square

È invece possibile costruire un modello a variabili nascoste che non soddisfi la single-valuedness e che sia equivalente al modello empirico dato nell'argomento precedente. In particolare sia dato (Ω, \Pr_λ) per il quale $\Lambda \doteq \{\lambda_0, \lambda_1\}$ e $\Pr_\lambda[\lambda_0] \doteq \Pr_\lambda[\lambda_1] \doteq \frac{1}{2}$. Imponendo che:

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= 1 \\ \Pr_\lambda[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_0 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= 1 \end{aligned}$$

con $\Pr_\lambda[\underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}] = 1$, si ottiene un modello a variabili nascoste che gode di λ -indipendenza e di determinismo forte – e quindi di indipendenza dagli outcome per i lemmi 3.3, 3.5 – equivalente al modello empirico dato.

3.2.2 Il teorema di Bell

Nel contesto della meccanica quantistica la conclusione a cui gli autori del paradosso EPR giunsero fu quella della necessità di considerare la meccanica quantistica incompleta. Secondo loro la località era imprescindibile poichè minava profondamente il requisito che non ci fosse propagazione di informazione super-luminale (oggi come si sa la non-località non implica che tale conseguenza sia necessaria). Tale approccio alla risoluzione del problema portò storicamente ad interrogarsi sulle caratteristiche che queste estensioni possono avere; Bell con il proprio teorema definì in modo inequivocabile che senz'altro qualunque teoria a variabili nascoste che vuole essere compatibile con la meccanica quantistica non può essere locale. Quello che viene qui proposto è un analogo di tale teorema in cui vengono solo fatte ipotesi sulle probabilità empiriche.

Teorema 3.2 (Bell [7]). *Esiste un modello empirico (Ψ, \Pr) per il quale qualunque modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) equivalente non può essere locale e godere di λ -indipendenza.*

Dimostrazione. Sia ρ uno stato normalizzato per il sistema AB, $\underline{\mathcal{A}}^{(1)} \doteq \left\{ \mathcal{A}_i^{(1)} \right\}_{i \in \{0,1\}}$, $\underline{\mathcal{A}}^{(2)} \doteq \left\{ \mathcal{A}_i^{(2)} \right\}_{i \in \{0,1\}}$ e $\underline{\mathcal{A}}^{(3)} \doteq \left\{ \mathcal{A}_i^{(3)} \right\}_{i \in \{0,1\}}$ test osservativi dicotomici per il sistema A, $\underline{\mathcal{B}}^{(1)} \doteq \left\{ \mathcal{B}_i^{(1)} \right\}_{i \in \{0,1\}}$, $\underline{\mathcal{B}}^{(2)} \doteq \left\{ \mathcal{B}_i^{(2)} \right\}_{i \in \{0,1\}}$ e $\underline{\mathcal{B}}^{(3)} \doteq \left\{ \mathcal{B}_i^{(3)} \right\}_{i \in \{0,1\}}$ test osservativi dicotomici per il sistema B. Il set Ψ è pertanto definito nel modo seguente:

$$\psi \doteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \left\{ \underline{\mathcal{A}}^{(1)}, \underline{\mathcal{A}}^{(2)}, \underline{\mathcal{A}}^{(3)} \right\} \times \left\{ \underline{\mathcal{B}}^{(1)}, \underline{\mathcal{B}}^{(2)}, \underline{\mathcal{B}}^{(3)} \right\}$$

La probabilità empirica \Pr definita su Ψ sia tale che $\Pr \left[\underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(j)} \right] = 1/9$ per ogni i e j e che valgano le seguenti probabilità condizionate:

	\mathcal{B}_0	\mathcal{B}_1		\mathcal{B}_0	\mathcal{B}_1
\mathcal{A}_0	0	1/2	\mathcal{A}_0	3/8	1/8
\mathcal{A}_1	1/2	0	\mathcal{A}_1	1/8	3/8
(a) $\Pr \left[\cdot, \cdot \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(j)} \right]$	con $i = j$		(b) $\Pr \left[\cdot, \cdot \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(j)} \right]$	con $i \neq j$	

Tabella 2.

Si supponga per assurdo che esiste un modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) equivalente al modello empirico dato che soddisfi la località e la λ -indipendenza e si fissi un i arbitrario tra quelli consentiti. Usando quanto riportato in tabella 2a si trova:

$$\begin{aligned} 0 &= \Pr \left[\mathcal{A}_0^{(i)}, \mathcal{B}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(i)} \right] = \sum_\lambda \Pr_\lambda \left[\mathcal{A}_0^{(i)}, \mathcal{B}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda \right] \times \Pr_\lambda \left[\lambda \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(i)} \right] = \\ &= \sum_\lambda \Pr_\lambda \left[\mathcal{A}_0^{(i)}, \mathcal{B}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda \right] \times \Pr_\lambda [\lambda] = \\ &= \sum_\lambda \Pr_\lambda \left[\mathcal{A}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda \right] \times \Pr_\lambda \left[\mathcal{B}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda \right] \times \Pr_\lambda [\lambda] \end{aligned}$$

dove le uguaglianze sfruttano la λ -indipendenza e la proprietà di località. L'ultima relazione mostra che per tutti i $\lambda \in \Lambda_{\neq 0} \doteq \{\lambda \in \Lambda \mid \Pr_\lambda [\lambda] > 0\}$ si ha:

$$\Pr_\lambda \left[\mathcal{A}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda \right] \times \Pr_\lambda \left[\mathcal{B}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda \right] = 0 \quad (3.11)$$

Ripetendo il ragionamento per $\Pr \left[\mathcal{A}_0^{(i)}, \mathcal{B}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(i)} \right] = 0$ si ricava analogamente che per ogni $\lambda \in \Lambda_{\neq 0}$:

$$\Pr_\lambda \left[\mathcal{A}_1^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda \right] \times \Pr_\lambda \left[\mathcal{B}_1^{(i)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda \right] = 0 \quad (3.12)$$

Grazie alla proprietà di λ -indipendenza e di località che hanno permesso di derivare le relazioni di eq.(3.11) e eq.(3.12) si è in grado di affermare che esistono due insiemi disgiunti K_i e L_i tali che $K_i \cup L_i \equiv \Lambda_{\neq 0}$ e che:

$$\Pr_\lambda \left[\mathcal{A}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda \right] = 1 \wedge \Pr_\lambda \left[\mathcal{B}_1^{(i)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda \right] = 1 \quad \text{per } \lambda \in K_i \quad (3.13)$$

$$\Pr_\lambda \left[\mathcal{A}_1^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda \right] = 1 \wedge \Pr_\lambda \left[\mathcal{B}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda \right] = 1 \quad \text{per } \lambda \in L_i \quad (3.14)$$

Sfruttando sempre le proprietà di λ -indipendenza e di località del modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) si può ricavare analogamente che:

$$\Pr[\mathcal{A}_0^{(i)}, \mathcal{B}_0^{(j)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(i)}] = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\neq 0}} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\mathcal{B}_0^{(j)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda]$$

Dal momento che per $i \neq j$ si ha che $\Lambda_{\neq 0} = (K_i \setminus L_j) + (L_j \setminus K_i) + (K_i \cap L_j)$, dove le varie componenti sono fra loro disgiunte, risulta che la somma precedente può essere riscritta come una somma di tre contributi: ciascuno inente ad uno dei tre subset appena menzionati. Grazie alle proprietà degli insiemi K_i e L_j , i vari argomenti delle sommatorie assumono valori differenti, nello specifico:

- * $\lambda \in K_i \setminus L_j$: per l'appartenenza a K_i $\Pr_\lambda[\mathcal{A}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda]$ è uno, mentre per la non appartenenza a L_j $\Pr_\lambda[\mathcal{B}_0^{(j)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda]$ è zero. Pertanto l'argomento della sommatoria, costituito dal prodotto dei due valori precedenti con $\Pr_\lambda[\lambda]$, in questo caso è zero;
- * $\lambda \in L_j \setminus K_i$: per la non appartenenza a K_i $\Pr_\lambda[\mathcal{A}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda]$ è zero, mentre per l'appartenenza a L_j $\Pr_\lambda[\mathcal{B}_0^{(j)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda]$ è uno. Anche in questo caso l'argomento della sommatoria è pertanto zero;
- * $\lambda \in K_i \cap L_j$: per l'appartenenza a K_i $\Pr_\lambda[\mathcal{A}_0^{(i)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \lambda]$ è uno, e per la appartenenza a L_j $\Pr_\lambda[\mathcal{B}_0^{(j)} \mid \underline{\mathcal{B}}^{(i)}, \lambda]$ è uno. In questo caso invece l'argomento della sommatoria è pertanto $\Pr_\lambda[\lambda]$.

L'unica sommatoria che sopravvive è quindi l'ultima e assume il valore

$$\sum_{\lambda \in K_i \cap L_j} \Pr_\lambda[\lambda \mid \rho] = \Pr_\lambda[K_i \cap L_j]$$

Si è pertanto ricavato che $\Pr[\mathcal{A}_0^{(i)}, \mathcal{B}_0^{(j)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(i)}] = \Pr_\lambda[K_i \cap L_j]$. Analogamente si può mostrare che $\Pr[\mathcal{A}_1^{(i)}, \mathcal{B}_1^{(j)} \mid \underline{\mathcal{A}}^{(i)}, \underline{\mathcal{B}}^{(i)}] = \Pr_\lambda[L_i \cap K_j]$. Utilizzando la tabella 2b queste due relazioni permettono di concludere che per ogni $i \neq j$ si ha

$$\Pr_\lambda[K_i \cap L_j] + \Pr_\lambda[L_i \cap K_j] = \frac{3}{4} \quad (3.15)$$

Dal momento che ogni coppia di insiemi L_i, K_i costituisce una partizione di $\Lambda_{\neq 0}$, è possibile rappresentare la relazione che intercorre fra loro come in figura 5, dove i vari insiemi K_i e L_j sono identificati nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K_1 &= \boxed{1} \cup \boxed{4} \cup \boxed{5} \cup \boxed{8} \\ L_1 &= \boxed{2} \cup \boxed{3} \cup \boxed{6} \cup \boxed{7} \\ K_2 &= \boxed{1} \cup \boxed{2} \cup \boxed{5} \cup \boxed{6} \\ L_2 &= \boxed{3} \cup \boxed{4} \cup \boxed{7} \cup \boxed{8} \\ K_3 &= \boxed{1} \cup \boxed{2} \cup \boxed{3} \cup \boxed{4} \\ K_3 &= \boxed{5} \cup \boxed{6} \cup \boxed{7} \cup \boxed{8} \end{aligned}$$

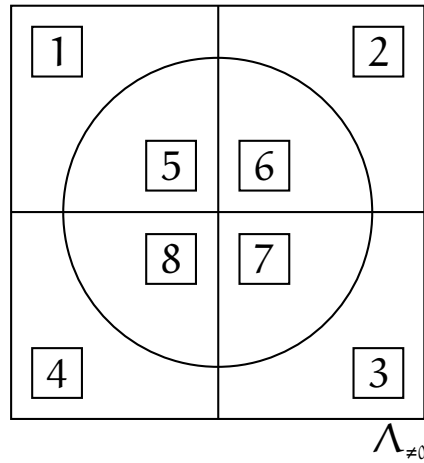


Figura 5.

L'eq.(3.15) riscritta per $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ assume nei vari casi la forma

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda [4] + \Pr_\lambda [8] + \Pr_\lambda [2] + \Pr_\lambda [6] &= \frac{3}{4} \\ \Pr_\lambda [5] + \Pr_\lambda [6] + \Pr_\lambda [3] + \Pr_\lambda [4] &= \frac{3}{4} \\ \Pr_\lambda [2] + \Pr_\lambda [3] + \Pr_\lambda [5] + \Pr_\lambda [8] &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sommando fra loro queste ultime relazioni e dividendo il risultato finale per 2 si ottiene:

$$\Pr_\lambda [2] + \Pr_\lambda [3] + \Pr_\lambda [4] + \Pr_\lambda [5] + \Pr_\lambda [6] + \Pr_\lambda [8] = \frac{9}{8}$$

Tale risultato è però impossibile, dato che deve essere che $\sum_i \Pr_\lambda [i] \leq 1$. □

Risulta importante sottolineare come il teorema di Bell non faccia alcun riferimento alla natura deterministica del modello a variabili nascoste: l'argomento si applica a qualunque tipo di modello a variabili nascoste locali (e con λ -indipendenza) a prescindere dal fatto che sia stocastico o meno.

3.3 ESTENSIONI DEI TEOREMI PRECEDENTI

Per quanto i risultati precedenti siano interessanti e importanti, affinché possano essere utilizzati è necessario che il modello della teoria operativa soprastante presenti al suo interno gli esatti pairing tra stati ed effetti che permettono la realizzazione delle misure di probabilità richieste nei due teoremi. Questa condizione può risultare troppo restrittiva affinché le caratteristiche del modello operativo siano minimali.

È pertanto interessante provare a modificare gli argomenti proposti da A. Brandenburger e N. Yanofsky per cercare di dare delle condizioni meno forti sulla misura di probabilità del modello empirico. Se, come vedremo, il paradosso EPR ha un analogo semplice, per il teorema di Bell non si può dire altrettanto: verrà pertanto proposto un argomento alternativo, dovuto a L. Hardy e successivamente generalizzato da A. Cabello, che permette di arrivare alla stessa conclusione di J. Bell con richieste molto minori.

La necessità di risultati meno stringenti

3.3.1 Il paradosso EPR in versione debole

Teorema 3.3 (EPR debole). *Sia (Ψ, Pr) un modello operativo in cui ρ è uno stato normalizzato del sistema AB, e $\underline{\mathcal{A}} \doteq \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \{0,1\}}$, $\underline{\mathcal{B}} \doteq \{\mathcal{B}_i\}_{i \in \{0,1\}}$ sono due test osservativi dicotomici rispettivamente per il sistema A e per il sistema B. La misura di probabilità $\text{Pr}[\cdot]$ sia tale che*

	\mathcal{B}_0	\mathcal{B}_1
\mathcal{A}_0	0	p
\mathcal{A}_1	q	$1 - p - q$

Tabella 3.

con p e q entrambi diversi da zero e da uno. Allora non esiste alcun modello a variabili nascoste equivalente al modello operativo dato che soddisfi le proprietà di single-valuedness e di indipendenza dagli outcome.

Dimostrazione. Sia $(\Omega, \text{Pr}_\lambda)$ un modello a variabili nascoste equivalente al modello operativo dato e supponiamo per assurdo che valga la single-valuedness e l'indipendenza dagli outcome. Sia pertanto $\Lambda \doteq \{\lambda_0\}$; valgono quindi le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= 0 \\ \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= p \\ \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= q \\ \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= 1 - p - q \end{aligned}$$

Le probabilità marginali $\text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0]$ e $\text{Pr}_\lambda[\mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0]$ valgono:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] + \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] = 0 + p \\ \text{Pr}_\lambda[\mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] &= \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] + \text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0] = 0 + q \end{aligned}$$

La probabilità condizionata $\text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \mathcal{B}_0, \lambda_0]$ assume invece il valore:

$$\text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \mathcal{B}_0, \lambda_0] = \frac{\text{Pr}_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0]}{\text{Pr}_\lambda[\mathcal{B}_0 \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda_0]} = \frac{0}{q} = 0$$

ma dato che $0 < p < 1$ questo risultato contraddice l'ipotesi di indipendenza dagli outcome. \square

L'argomento precedente lascia un ampio spazio alle probabilità degli outcome $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_0)$ e $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ senza costringerli ad assumere dei valori precisi come nell'argomento proposto da A. Brandenburger e N. Yanofsky.

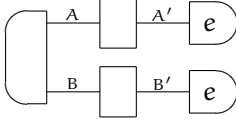
3.3.2 Non-località di Hardy-Cabello

Nel 1992 L. Hardy formulò un teorema che, contrariamente al teorema di Bell, riesce a mettere in luce l'assenza di realismo locale della meccanica quantistica senza l'ausilio di disuguaglianze che si servono dei valori di aspettazione di osservabili. [23, 22] Successivamente A. Cabello generalizzò l'argomento di Hardy, presentandone una versione con ipotesi meno stringenti. [8, 27] Verrà ora presentato l'argomento di Hardy-Cabello per un modello operativo causale, e si cercherà di mettere in evidenza il ruolo che le varie proprietà dei modelli operazionali giocano per poter affermare che l'argomento di Hardy-Cabello nega l'esistenza del realismo locale.

Si consideri il seguente modello per una teoria operativa causale:

	\mathcal{B}_0	\mathcal{B}_1	\mathcal{B}'_0	\mathcal{B}'_1
\mathcal{A}_0	o	o	o	o
\mathcal{A}_1	o	1		
\mathcal{A}'_0	o		p	
\mathcal{A}'_1	o			

Tabella 4.



in cui il test preparativo per il sistema AB è un test deterministico che prepara lo stato $|\rho\rangle_{AB}$. Sui sistemi A e B viene eseguito un test dicotomico scelto rispettivamente tra $\underline{\mathcal{A}}$, $\underline{\mathcal{A}'}$ e $\underline{\mathcal{B}}$, $\underline{\mathcal{B}'}$ con:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{A}} &\doteq \{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1\} & \underline{\mathcal{A}'} &\doteq \{\mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_1\} \\ \underline{\mathcal{B}} &\doteq \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1\} & \underline{\mathcal{B}'} &\doteq \{\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_1\} \end{aligned}$$

Si supponga di aver definito in maniera appropriata l'insieme Ψ della definizione 3.1 e che per la misura di probabilità Pr su Ψ valgono le seguenti relazioni:

$$\Pr[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}] = q_1 \quad (3.16)$$

$$\Pr[\mathcal{A}'_0, \mathcal{B}_0 | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}}] = 0 \quad (3.17)$$

$$\Pr[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}'_0 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}'}] = 0 \quad (3.18)$$

$$\Pr[\mathcal{A}'_0, \mathcal{B}'_0 | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}'}] = q_2 \quad (3.19)$$

con $q_1 < q_2$.⁸ Si immagini ora che esista un modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) equivalente al modello operativo scritto precedentemente; le eq.(3.16)-(3.19) per tale modello assumono rispettivamente la forma:

$$\sum_{\lambda} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}] = q_1 \quad (3.16\text{-bis})$$

$$\sum_{\lambda} \Pr_\lambda[\mathcal{A}'_0, \mathcal{B}_0 | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}}] = 0 \quad (3.17\text{-bis})$$

$$\sum_{\lambda} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}'_0 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}'}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}'}] = 0 \quad (3.18\text{-bis})$$

$$\sum_{\lambda} \Pr_\lambda[\mathcal{A}'_0, \mathcal{B}'_0 | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}'}, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}'}] = q_2 \quad (3.19\text{-bis})$$

Ci si ponga ora il problema di valutare quali siano le proprietà che non può possedere la misura di probabilità \Pr_λ del modello precedente affinché le eq.(3.16-bis)-(3.19-bis) siano verificate con $q_1 < q_2$. In particolare ci si interesserà della località e della λ -indipendenza.

Si assuma la λ -indipendenza,⁹ in modo che:

$$\Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}] = \Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}'}] = \Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}}] = \Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}'}] = \Pr_\lambda[\lambda]$$

L'eq.(3.17-bis) e l'eq.(3.18-bis) impongono che per tutti i $\lambda \in \Lambda_{\neq 0} \doteq \{\lambda \in \Lambda | \Pr_\lambda[\lambda] \neq 0\}$ si abbia:

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}'_0, \mathcal{B}_0 | \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{B}}, \lambda] = 0 \quad \text{e} \quad \Pr_\lambda[\mathcal{A}_0, \mathcal{B}'_0 | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}'}, \lambda] = 0$$

⁸ L'argomento originale dovuto a Hardy può essere recuperato imponendo $q_1 = 0$.

⁹ Sulla ragionevolezza di tale requisito si veda la sezione 4.2.1.2.

Si consideri adesso l'eq.(3.19-bis); quest'ultima afferma che esiste un insieme $\Lambda' \subset \Lambda$ – sicuramente non vuoto – per il quale $\forall \lambda \in \Lambda'$ si ha che:

$$\Pr_\lambda[A'_0, B'_0 | \underline{A}', \underline{B}', \lambda] > 0$$

Fissato arbitrariamente un $\lambda \in \Lambda_{\neq 0} \cap \Lambda'$, queste due osservazioni permettono di completare nella tabella 4 con quanto è stato riportato in nero.

L'ipotesi di località implica che i test, oltre a commutare fra loro a livello empirico, commutino anche a livello di variabili nascoste e che valga l'eq.(3.10); pertanto $\forall \lambda \in \Lambda_{\neq 0}$ si ha:

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[A'_0, B_0 | \underline{A}', \underline{B}, \lambda] &= \Pr_\lambda[A'_0 | \underline{A}', \lambda] \times \Pr_\lambda[B_0 | \underline{B}, \lambda] = 0 \\ \Pr_\lambda[A_0, B'_0 | \underline{A}, \underline{B}', \lambda] &= \Pr_\lambda[A_0 | \underline{A}, \lambda] \times \Pr_\lambda[B'_0 | \underline{B}', \lambda] = 0 \\ \Pr_\lambda[A'_0, B'_0 | \underline{A}', \underline{B}', \lambda] &= \Pr_\lambda[A'_0 | \underline{A}', \lambda] \times \Pr_\lambda[B'_0 | \underline{B}', \lambda] > 0 \end{aligned}$$

Sfruttando questo fatto si osserva che per per i λ che stiamo considerando deve valere che

$$\begin{aligned} (\Pr_\lambda[A'_0 | \underline{A}', \lambda] = 0) \vee (\Pr_\lambda[B_0 | \underline{B}, \lambda] = 0) \\ (\Pr_\lambda[A_0 | \underline{A}, \lambda] = 0) \vee (\Pr_\lambda[B'_0 | \underline{B}', \lambda] = 0) \\ (\Pr_\lambda[A'_0 | \underline{A}', \lambda] \neq 0) \wedge (\Pr_\lambda[B'_0 | \underline{B}', \lambda] \neq 0) \end{aligned}$$

Le tre relazioni precedenti implicano che:

$$\Pr_\lambda[A_0 | \underline{A}, \lambda] = 0 \qquad \Pr_\lambda[B_0 | \underline{B}, \lambda]$$

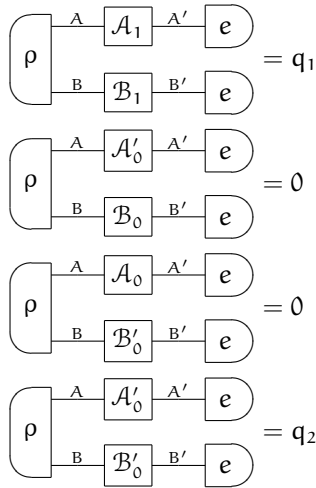
che permette di riempire la tabella con gli zeri scritti in **rosso**. Visto che le probabilità marginali non dipendono dall'altro test eseguito (sempre grazie alla proprietà di località), cioè nello specifico che:

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[A_0 | \underline{A}, \underline{B}, \lambda] &= \Pr_\lambda[A_0 | \underline{A}, \underline{B}', \lambda] \\ \Pr_\lambda[B_0 | \underline{A}, \underline{B}, \lambda] &= \Pr_\lambda[B_0 | \underline{A}', \underline{B}, \lambda] \end{aligned}$$

si può completare con gli zeri in **azzurro**. Ma visto che ogni quadrato della tabella costituisce un test completo si conclude necessariamente che per tutti i λ in $\Lambda_{\neq 0} \cap \Lambda'$ si ha che $\Pr_\lambda[A_1, B_1 | \underline{A}, \underline{B}, \lambda] = 1$. Tutto ciò implica che q_1 debba essere necessariamente maggiore o al limite uguale a q_2 , ma questo è contro ipotesi. Pertanto un modello empirico che riesce a riprodurre le probabilità congiunte delle eq.(3.16)-(3.19) non presenta un modello a variabili nascoste equivalente che soddisfa la località e la λ -indipendenza. Vale pertanto il seguente risultato:

Teorema 3.4 (Hardy-Cabello per teorie operazionali). *Un modello operativo costituito da*

uno stato $|\rho\rangle$ per il sistema AB, dai test dicotomici $\underline{A}, \underline{A}'$ per il sistema A e $\underline{B}, \underline{B}'$ per il sistema B, tali che:



con $q_1 < q_2$, non ammette un'interpretazione localmente realista.

Il politopo no-signaling e l'argomento di Hardy-Cabello

È interessante notare come le probabilità dell'argomento di Hardy-Cabello non consentano comunicazione super-luminale. Ciò può essere verificato in modo semplice constatando che le probabilità marginali del sistema A non dipendono dalla scelta del test eseguito su B (e viceversa). Ora si preferirà mostrare una strada alternativa più generale che permette di raggiungere gli stessi risultati, cioè che le condizioni di Hardy-Cabello sono non-signaling e che violano il realismo locale. [4, 2]

Un box a correlazioni bipartite (che in seguito verrà semplicemente chiamato *box*) è definito come un set di possibili input per due sperimentatori (in seguito Alice e Bob), un set di possibili outcome per ogni input, e una misura di probabilità congiunta su una coppia di outcome condizionata dalla scelta di una coppia di input. Chiamando rispettivamente X e Y gli input di Alice e Bob e i rispettivi outcome a e b, la probabilità congiunta di due outcome condizionata dagli input verrà indicata brevemente con $p_{ab|XY}$. Dal momento che quest'ultime sono probabilità soddisfano la condizione di positività

Il concetto di box

$$p_{ab|XY} \geq 0 \quad \forall a, b, X, Y \tag{3.20}$$

e di normalizzazione

$$\sum_{a,b} p_{ab|XY} = 1 \quad \forall X, Y$$

Tra tutti i possibili box ci si interesserà solamente di quelli che non permettono comunicazione istantanea tra Alice e Bob, i cosiddetti *box no-signaling*. Questa restrizione si traduce nella richiesta che la probabilità marginale di Alice non dipenda dalla scelta dell'input di Bob, e viceversa, pertanto

I box no-signaling

$$\sum_b p_{ab|XY} = \sum_b p_{ab|X'Y} \doteq p_{a|X}$$

$$\sum_a p_{ab|XY} = \sum_a p_{ab|X'Y} \doteq p_{b|Y}$$

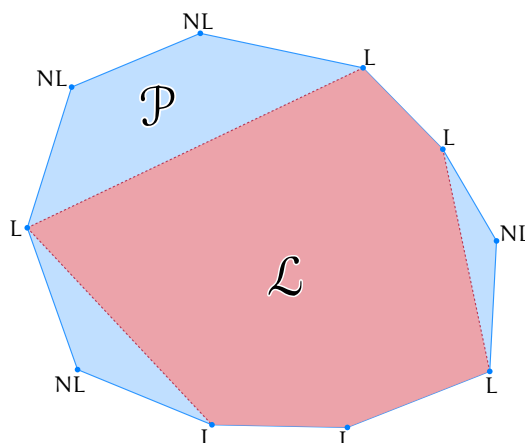


Figura 6.: Rappresentazione schematica di un politopo no-signaling \mathcal{P} e del politopo locale \mathcal{L} . I vertici L e NL sono rispettivamente i vertici locali e non-locali. Le disuguaglianze di Bell identificano le facce $(n - 1)$ -dimensionali tratteggiate in rosso. [4]

Alice può selezionare il suo input in ogni momento, e non appena fa ciò ottiene il proprio outcome immediatamente; analogamente per Bob. Può esistere un intervallo di tempo tra la scelta dei due sperimentatori, ma questo non comporta alcuna differenza per le correlazioni. Verranno considerati sempre e solamente i box con un numero finito di input e di output.

Il politopo no-signaling

Dal momento che tutti i vincoli precedenti sono lineari, l'insieme di tutti i box con un numero di input e di output fissati costituisce un politopo, che verrà denotato con \mathcal{P} : il cosiddetto *politopo no-signaling*.¹⁰ Tale set è convesso, infatti una qualunque combinazione convessa di box no-signaling è ancora un box no-signaling.

Box locali e non-locali

In generale i box no-signaling possono essere suddivisi in due tipologie: i box locali e quelli non-locali. Un box è *locale* se e solo se può essere simulato da due sperimentatori non comunicanti avendo a disposizione una risorsa random condivisa, cioè se

$$p_{ab|XY} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} p_{a|X,\lambda} p_{b|Y,\lambda}$$

dove λ è il valore della variabile random condivisa e p_{λ} è la probabilità di realizzazione di un particolare valore di λ . $p_{\lambda} p_{a|X,\lambda}$ è la probabilità che dato il valore λ per la variabile random Alice veda l'outcome a avendo scelto l'input X (analogamente per Bob). L'insieme dei box locali è a sua volta un politopo convesso \mathcal{L} i cui vertici corrispondono a box locali deterministici, cioè a quei box per i quali $p_{a|X}$ e $p_{b|Y}$ sono zero o uno. Le condizioni di normalizzazione del tipo eq.(3.20) identificano quelle che sono le facce $(n - 1)$ -dimensionali di tipo triviale del politopo; quelle di tipo non triviale sono invece identificate da disuguaglianze del tipo di Bell. La violazione delle disuguaglianze di Bell da parte di un box implica che la rispettiva $p_{ab|XY}$ giace all'esterno del politopo locale, e pertanto il box è *non-locale*.

Box bipartiti a due input e due output

Si considerino ora i box in cui Alice e Bob possono scegliere entrambi tra due input ognuno dei quali ha due output; siano pertanto $X, Y, a, b \in \{0, 1\}$. Un box di questo tipo è identificato da 2^4 probabilità $p_{ab|XY}$ non tutte fra loro indipendenti: visto che devono valere 4 condizioni di normalizzazione e 4 condizioni di no-signaling risulta che solo 8 delle 16 totali sono libere. La dimensione del politopo \mathcal{P} è pertanto 8. I vertici di \mathcal{P} sono costituiti dai box che saturano le condizioni scritte in precedenza in un numero

¹⁰ Vedi l'appendice A per qualche informazione sui politopi.

sufficiente da consentirne la determinazione univoca.¹¹ Risulta che esistono 24 vertici, che possono essere suddivisi in due gruppi:

VERTICI LOCALI: sono 16 e sono costituiti dai box locali deterministici: i.e., quelli che assegnano un outcome definito per ogni input di Alice e Bob. Possono essere descritti sinteticamente tramite la seguente relazione

$$p_{ab|XY}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = \alpha X \oplus \beta, \\ & b = \gamma Y \oplus \delta; \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1\}$ e il simbolo \oplus indica la somma modulo 2. Tutti e soli i vertici locali sono anche i vertici del politopo locale \mathcal{L} .

VERTICI NON-LOCALI: sono 8 e possono essere caratterizzati sinteticamente tramite la relazione

$$p_{ab|XY}^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } a \oplus b = XY \oplus \alpha X \oplus \beta \gamma; \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$.

Le facce $(n-1)$ -dimensionali non triviali del politopo locale \mathcal{L} sono costituite dalle disuguaglianze CHSH.

Faccendo le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{ll} X = 0 \longleftrightarrow \mathcal{A} & X = 1 \longleftrightarrow \mathcal{A}' \\ Y = 0 \longleftrightarrow \mathcal{B} & Y = 1 \longleftrightarrow \mathcal{B}' \\ a, b = 0 \longleftrightarrow 1 & a, b = 1 \longleftrightarrow 0 \end{array}$$

L'argomento di Hardy tramite box no-signaling

è immediato verificare che 5 dei vertici locali e un vertice non-locale soddisfano le condizioni di eqs.(3.16)-(3.19) con $q_1 = 0$, nello specifico i vertici $p_{ab|XY}^{0001}$, $p_{ab|XY}^{0011}$, $p_{ab|XY}^{0100}$, $p_{ab|XY}^{1100}$, $p_{ab|XY}^{1111}$ e $p_{ab|XY}^{001}$. Qualcuno potrebbe stupirsi che esistano dei box locali che possono soddisfare le condizioni imposte, dal momento che si è detto in precedenza che l'argomento di Hardy (che coincide con l'argomento di Cabello in cui si pone $q_1 = 0$) mostra l'impossibilità del realismo locale. Si presti però bene attenzione che non è stato detto che q_2 debba essere maggiore di 0; pertanto i box locali specificati in realtà non soddisfano le condizioni di Hardy! In generale tutti i box $p_{ab|XY}^{\mathcal{J}_c}$ che soddisfano le condizioni precedenti possono essere scritti come una combinazione convessa di questi vertici: i.e.,

$$p_{ab|XY}^{\mathcal{J}_c} = c_1 p_{ab|XY}^{0001} + c_2 p_{ab|XY}^{0011} + c_3 p_{ab|XY}^{0100} + c_4 p_{ab|XY}^{1100} + c_5 p_{ab|XY}^{1111} + c_6 p_{ab|XY}^{001}$$

con $\sum_{i=1}^6 c_i = 1$. Come detto l'argomento di Hardy richiede inoltre che q_2 sia maggiore di zero: riferendosi all'eq.(3.19) si nota che dato un box $p_{ab|XY}^{\mathcal{J}_c}$ la probabilità q_2 coincide con il valore $p_{11|11}^{\mathcal{J}_c} = c_6$. La richiesta che q_2 sia positivo impone quindi che c_6 sia maggiore di zero, pertanto un qualunque box che soddisfa le condizioni di Hardy può essere costruito come una miscela di box di cui uno è senz'altro il box non-locale $p_{ab|XY}^{001}$, provando in questo modo la non-località di tale box, e quindi l'impossibilità di un'interpretazione localmente realista.

Il caso generale di un box $p_{ab|XY}^c$ che soddisfa le condizioni di eqs.(3.16)-(3.19) con $q_1 \neq 0$ (per il momento non imponiamo ancora $q_1 < q_4$) è caratterizzato dalla combinazione dei

L'argomento di Cabello tramite box no-signaling

¹¹ Per dettagli ulteriori si rimanda a [4].

	$(b_0 $	$(b_1 $
$(a_0 $	0	$(1-t) \times (a_0 \alpha_1)$
$(a_1 $	t	$(1-t) \times (a_1 \alpha_1)$

Tabella 5.

precedenti vertici con i vertici locali $p_{ab|XY}^{0000}$, $p_{ab|XY}^{0010}$, $p_{ab|XY}^{1000}$, $p_{ab|XY}^{1010}$ e il vertice non-locale $p_{ab|XY}^{110}$. Si ottiene pertanto:

$$p_{ab|XY}^c = p_{ab|XY}^{jc} + c_7 p_{ab|XY}^{0000} + c_8 p_{ab|XY}^{0010} + c_9 p_{ab|XY}^{1000} + c_{10} p_{ab|XY}^{1010} + c_{11} p_{ab|XY}^{110}$$

ovviamente con $\sum_{i=1}^{11} c_i = 1$. Dato che $q_1 = p_{00|00}^c = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + \frac{1}{2}c_{11}$ e che $q_2 = p_{11|11}^c = \frac{1}{2}c_6 + c_{10}$, imponendo $q_2 > q_1$ come richiesto dall'argomento di Hardy-Cabello si trova che

$$\frac{1}{2}c_6 > c_7 + c_8 + c_9 + \frac{1}{2}c_{11}$$

e cioè che c_6 è sempre maggiore di zero. Pertanto anche in questo caso un box che rispetta le condizioni di Hardy-Cabello è non-locale, visto che può essere visto come una miscela di box no-signaling di cui uno è senz'altro il box non-locale $p_{ab|XY}^{001}$.

3.4 TEOREMI NO-GO E PROPRIETÀ DELLE TEORIE OPERAZIONALI

Si proveranno ora ad utilizzare i risultati precedenti per valutare quali proprietà delle teorie operazionali confliggono con la possibilità che esista un equivalente modello a variabili a nascoste.

3.4.1 EPR

Sia $|\rho\rangle$ uno stato del sistema composto AB che faccia lo steering del proprio stato marginale $|\sigma\rangle \doteq (e|_B |\rho\rangle)_{AB}$; pertanto per ogni combinazione convessa di stati del sistema A tale che $|\sigma\rangle \doteq \sum_i p_i |\alpha_i\rangle$ esiste un test osservativo $\underline{b} \doteq \{(b_i|\}$ tale che $(b_i|_B |\rho\rangle)_{AB} = t_i |\alpha_i\rangle_A$. Tra tutte le possibili combinazioni convesse se ne prenda una non triviale costituita da soli due stati normalizzati $|\alpha_0\rangle$, e $|\alpha_1\rangle$: i.e.,

$$|\sigma\rangle_A = t |\alpha_0\rangle_A + (1-t) |\alpha_1\rangle_A \quad \text{con } 0 < t < 1$$

Inoltre per l'ipotesi di steering esiste un test osservativo $\underline{b} \doteq \{(b_0|, (b_1|\}$ su B tale che:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} A \\ \rho \\ B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_0 \\ \end{array} \right) &= t \times \left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \end{array} \right) \begin{array}{c} A \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{c} A \\ \rho \\ B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_1 \\ \end{array} \right) &= (1-t) \times \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \end{array} \right) \begin{array}{c} A \\ \end{array} \end{aligned}$$

Si introduca ora un test osservativo $\underline{a} \doteq \{(a_0|, (a_1|\}$ sul sistema A con le seguenti proprietà:

$$(a_0 | \alpha_0)_A = 0 \tag{3.21}$$

$$0 < (a_0 | \alpha_1)_A \leq 1 \tag{3.22}$$

Vengano ora valutate tutte le probabilità congiunte degli eventi dei test osservativi \underline{a} e \underline{b} ; si ottiene che:

$$\begin{aligned}
 \Pr[a_0, b_0 | a, b, \rho] &= \left(\begin{array}{c} \rho \\ \hline \text{A} \\ \hline \text{B} \end{array} \begin{array}{c} a_0 \\ b_0 \end{array} \right) = t \times \left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \hline \text{A} \end{array} a_0 \right) = 0 \\
 \Pr[a_1, b_0 | a, b, \rho] &= \left(\begin{array}{c} \rho \\ \hline \text{A} \\ \hline \text{B} \end{array} \begin{array}{c} a_1 \\ b_0 \end{array} \right) = t \times \left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \hline \text{A} \end{array} a_1 \right) = t \\
 \Pr[a_0, b_1 | a, b, \rho] &= \left(\begin{array}{c} \rho \\ \hline \text{A} \\ \hline \text{B} \end{array} \begin{array}{c} a_0 \\ b_1 \end{array} \right) = (1-t) \times \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \text{A} \end{array} a_0 \right) \\
 \Pr[a_1, b_1 | a, b, \rho] &= \left(\begin{array}{c} \rho \\ \hline \text{A} \\ \hline \text{B} \end{array} \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array} \right) = (1-t) \times \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \text{A} \end{array} a_1 \right)
 \end{aligned}$$

dove le uguaglianze finali delle prime due relazioni sono dovute alla eq.(3.21). Riportando per chiarezza i risultati precedenti in tabella 5 si nota che, visto che la miscela è non triviale e visto che vale eq.(3.22), le probabilità in gioco rispettano i vincoli del teorema 3.3.

Si noti come le proprietà delle eq.(3.21)-eq.(3.22) pur non essendo delle condizioni di discriminabilità perfetta tra gli stati $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$, ne garantiscono comunque una distinzione a livello probabilistico tramite il test a : l'esecuzione di tale osservazione permette infatti di asserire con certezza che quando capita l'evento $(a_0|)$ lo stato di partenza non poteva necessariamente essere $|\alpha_0\rangle$. Se invece capita l'effetto $(a_1|)$ nulla si può dire: proprio il fatto che solo parte degli outcome danno risultati inequivocabili sullo stato di partenza si dice che tale discriminazione è probabilistica. È pertanto utile dare la seguente definizione.

Definizione 3.14 (Discriminabilità probabilistica fra due stati). *Due stati $|\rho_0\rangle, |\rho_1\rangle$ sono discriminabili a livello probabilistico se e solo se esiste un test osservativo dicotomico $\underline{a} \doteq \{a_0, a_1\}$, tale che*

$$\begin{aligned}
 (a_0 | \rho_0) &= 0 \\
 0 &\leq (a_0 | \rho_1) < 1
 \end{aligned}$$

In seguito alle osservazioni precedenti vale pertanto il seguente lemma:

Lemma 3.8. *Sia dato un modello operativo in cui:*

- * *esistono due stati $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$ per il sistema A fra loro discriminabili probabilisticamente;*
- * *$|\sigma\rangle$ è una miscela non triviale di $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$;*
- * *esiste uno stato $|\rho\rangle$ in grado di fare lo steering di $|\sigma\rangle$.*

Allora non esiste alcun equivalente modello a variabili nascoste che soddisfi la single-valuedness e l'indipendenza degli outcome.

È inoltre possibile mostrare in modo banale un risultato inverso a quello precedente:

Lemma 3.9. *Se per un modello operativo con i test osservativi $\underline{a}, \underline{b}$ rispettivamente per i sistemi A, B valgono le probabilità dell'argomento EPR debole (tabella 3), allora tale modello ammette:*

* due stati $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$ per il sistema A fra loro discriminabili probabilisticamente;

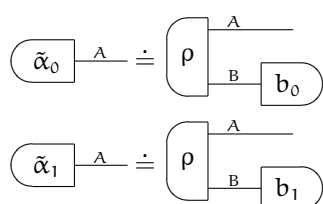
* uno stato $|\sigma\rangle$, miscela non triviale di $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$;

* uno stato $|\rho\rangle$ in grado di fare lo steering di $|\sigma\rangle$.

Dimostrazione. Sia $|\rho\rangle$ uno stato per cui valgano le probabilità dell'argomento EPR debole, di seguito riportate per chiarezza: con $0 < p < 1, 0 < q < 1$.

	$(b_0 $	$(b_1 $
$(a_0 $	0	p
$(a_1 $	q	$1 - p - q$

Si definiscano gli stati $(\tilde{\alpha}_0|, (\tilde{\alpha}_1|$ per il sistema A nel modo seguente:



In generale $(\tilde{\alpha}_0|, (\tilde{\alpha}_1|$ non sono normalizzati; pertanto si introducano gli stati deterministici $(\alpha_0|, (\alpha_1|$ tramite i quali $(\tilde{\alpha}_0|, (\tilde{\alpha}_1|$ possono essere riscritti nel modo seguente:

$$|\tilde{\alpha}_0\rangle = (e | \tilde{\alpha}_0) \times |\alpha_0\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}_1\rangle = (e | \tilde{\alpha}_1) \times |\alpha_1\rangle$$

$(\alpha_0|, (\alpha_1|$ sono fra loro discriminabili probabilisticamente, infatti per ipotesi si ha che:

$$(a_0 | \alpha_0) \doteq \frac{(a_0 | (b_0 | \rho)}{(e | \tilde{\alpha}_0)} = 0$$

$$(a_0 | \alpha_1) \doteq \frac{(a_0 | (b_1 | \rho)}{(e | \tilde{\alpha}_1)} = \frac{p}{(e | \tilde{\alpha}_1)}$$

le quali sono le condizioni della definizione 3.14.

Venga definito lo stato $|\sigma\rangle$ per il sistema A nel modo seguente:

$$|\sigma\rangle \doteq (e | \tilde{\alpha}_0) \times |\alpha_0\rangle + (e | \tilde{\alpha}_1) \times |\alpha_1\rangle$$

$|\sigma\rangle$ è normalizzato, infatti:

$$\begin{aligned} (e | \sigma) &= (e | \tilde{\alpha}_0) \times (e | \alpha_0) + (e | \tilde{\alpha}_1) \times (e | \alpha_1) = (e | \tilde{\alpha}_0) + (e | \tilde{\alpha}_1) = \\ &= (a_0 | \tilde{\alpha}_0) + (a_1 | \tilde{\alpha}_0) + (a_0 | \tilde{\alpha}_1) + (a_1 | \tilde{\alpha}_1) = \\ &= (a_0 | (b_0 | \rho) + (a_1 | (b_0 | \rho) + (a_0 | (b_1 | \rho) + (a_1 | (b_1 | \rho) = 0 + q + p + 1 - p - q = 1 \end{aligned}$$

Lo stato $|\sigma\rangle$ può pertanto essere considerato come una miscela degli stati deterministici $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$. Tale miscela inoltre è non triviale, poichè i coefficienti di miscela $(e | \tilde{\alpha}_0) = (a_0 | \tilde{\alpha}_0) + (a_1 | \tilde{\alpha}_0)$ e $(e | \tilde{\alpha}_1) = (a_0 | \tilde{\alpha}_1) + (a_1 | \tilde{\alpha}_1)$ risultano rispettivamente uguali a q e $1 - q$, e per ipotesi $0 < q < 1$.

Lo stato $|\sigma\rangle$ è lo stato marginale di $|\rho\rangle$ rispetto al sistema A, infatti

$$(e |_B |\rho)_{AB} = (b_0 |_B |\rho)_{AB} + (b_1 |_B |\rho)_{AB} = |\tilde{\alpha}_0\rangle_A + |\tilde{\alpha}_1\rangle_A \equiv |\sigma\rangle_A$$

Dall'uguaglianze precedente si nota subito che

$$\begin{aligned} |\tilde{\alpha}_0\rangle_A &\equiv (b_0|_B |\rho\rangle_{AB}) \\ |\tilde{\alpha}_1\rangle_A &\equiv (b_1|_B |\rho\rangle_{AB}) \end{aligned}$$

e pertanto si conclude che $|\rho\rangle$ è uno stato in grado di fare lo steering del proprio marginale $|\sigma\rangle_A$ tramite gli effetti $(b_1|, (b_1|$ sul sistema B. \square

Ricapitolando, vale il seguente lemma riassuntivo:

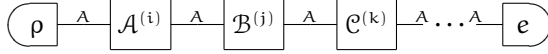
Lemma 3.10. *Dato un modello un'operazionale con due sistemi A, B e due test $\underline{a} \doteq \{(a_0|_A, (a_1|_A\}$, $\underline{b} \doteq \{(b_0|_B, (b_1|_B\}$, condizione necessaria e sufficiente affinché il modello soddisfi le probabilità congiunte di tabella 3 è che ammetta:*

- * due stati $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$ per il sistema A fra loro discriminabili probabilisticamente;
- * lo stato $|\sigma\rangle$, miscela non triviale di $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$;
- * uno stato $|\rho\rangle$ in grado di fare lo steering di $|\sigma\rangle$.

3.4.2 Non-località di Hardy-Cabello

Si cercherà ora di valutare quando un modello operativo non ammette un'interpretazione localmente realista sfruttando l'argomento di Hardy-Cabello. Si noti che verrà sempre assunta la λ -indipendenza.¹²

È interessante notare che l'argomento del teorema 3.4 non richiede che lo stato $|\rho\rangle$ di partenza sia uno stato bipartito. Tutte le definizioni date in §3.1 sono applicabili anche ad un modello operativo (Ψ, Pr) come il seguente, costituito da test in cascata su un sistema singolo:



e dove

- * $\mathcal{A}^{(i)} \doteq \{\mathcal{A}_n^{(i)}\}_{n \in \Gamma_A^{(i)}}$ con $\mathcal{A}_n^{(i)} \in \mathfrak{T}(A, A)$, $i \in \Gamma_A \subset \mathbb{N}$ e $|\Gamma_A| < +\infty$,
- * $\mathcal{B}^{(j)} \doteq \{\mathcal{B}_n^{(j)}\}_{n \in \Gamma_B^{(j)}}$ con $\mathcal{B}_n^{(j)} \in \mathfrak{T}(A, A)$, $j \in \Gamma_B \subset \mathbb{N}$ e $|\Gamma_B| < +\infty$,
- * $\mathcal{C}^{(k)} \doteq \{\mathcal{C}_n^{(k)}\}_{n \in \Gamma_C^{(k)}}$ con $\mathcal{C}_n^{(k)} \in \mathfrak{T}(A, A)$, $k \in \Gamma_C \subset \mathbb{N}$ e $|\Gamma_C| < +\infty$,

e così via per gli altri test. Si noti che può essere considerata anche in questo caso la nozione di località, per lo meno ad un livello formale.

Alla luce di ciò è possibile ripetere pedissequamente la dimostrazione dell'argomento di Hardy-Cabello e giungere alla stessa conclusione. In questo caso però non appare chiaro cosa voglia dire l'affermazione: *il modello operativo non è localmente realista*. In ogni caso si procederà con l'analisi anche di questo caso, poichè porta a risultati a prima vista interessanti.

¹² Sulla ragionevolezza di tale requisito si veda la sezione 4.2.1.2.

3.4.2.1 *Test in cascata*

Mentre nel caso bipartito si suppone sempre valida la commutatività dei test su sottosistemi differenti, nel caso di sistema singolo con test in cascata questo non è detto. Non è però significativo il caso di test non commutanti, dal momento che è immediato constatarne l'incompatibilità con il requisito di località e λ -indipendenza. Si supponga infatti per ipotesi che valga la località; per un modello come quello introdotto precedentemente si ricava perciò che:

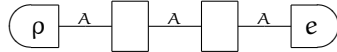
$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \lambda] \times \Pr_\lambda[B_j | \underline{B}, \lambda] \times \Pr_\lambda[C_k | \underline{C}, \lambda] \times \dots = \\ = \Pr_\lambda[A_i, B_j, C_k | \dots \circ \underline{C} \circ \underline{B} \circ \underline{A}, \lambda] = \Pr_\lambda[A_i, B_j, C_k | \dots \circ \underline{C} \circ \underline{A} \circ \underline{B}, \lambda] = \dots \end{aligned}$$

Sfruttando l'ipotesi di λ -indipendenza è possibile preservare il risultato precedente anche in seguito alla marginalizzazione sui λ : i.e.,

$$\Pr_\lambda[A_i, B_j, C_k | \dots \circ \underline{C} \circ \underline{B} \circ \underline{A}, \dots] = \Pr_\lambda[A_i, B_j, C_k | \dots \circ \underline{C} \circ \underline{A} \circ \underline{B}, \dots] = \dots$$

Si motra in questo modo la non equivalenza fra il modello a variabili nascoste e il modello operativo: nel primo i test infatti commutano, contrariamente al secondo dove per ipotesi non c'è commutazione.¹³ Si conclude pertanto che per un modello in assenza di commutazione non ha senso parlare di località.

L'attenzione, come prevedibile, si sposterà al caso commutante. Si consideri il seguente modello per una teoria operativa causale:



dove $|e\rangle$ è l'effetto deterministico, $|\rho\rangle$ è uno stato per il sistema A e dove successivamente alla preparazione vengono eseguiti due test in cascata dicotomici fra loro commutanti sullo stato $|\rho\rangle$ considerato. Tali test in cascata possono essere scelti liberamente all'interno del set $\Upsilon \doteq \{\underline{A}, \underline{B}\}$. Si supponga che per tale modello valgano le seguenti probabilità a livello di teoria operativa

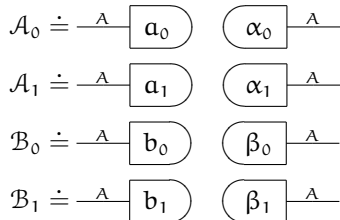
$$\Pr[A_1, A_1 | \underline{A}, \underline{A}] = q_1 \tag{3.23}$$

$$\Pr[A_0, B_0 | \underline{A}, \underline{B}] = 0 \tag{3.24}$$

$$\Pr[B_0, B_0 | \underline{B}, \underline{B}] = q_2 \tag{3.25}$$

con $q_1 < q_2$.

Si cercherà ora di vedere quali requisiti deve possedere una teoria operativa per poter soddisfare le probabilità empiriche di Hardy-Cabello. Dato un sistema A , siano $|\rho\rangle, |\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle, |\beta_0\rangle, |\beta_1\rangle$ stati normalizzati per il sistema, e $\underline{a} \doteq \{(|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle)\}$ e $\underline{b} \doteq \{(|\beta_0\rangle, |\beta_1\rangle)\}$ due test osservativi per lo stesso sistema. Definendo gli eventi dei test \underline{A} e \underline{B} delle eq.(3.23)-(3.25) come:



¹³ Si ricordi che la commutazione è sempre da riferirsi al modello: i.e., è sufficiente che questa sia verificata per i soli stati presenti nel modello operativo – o a variabili nascoste – in considerazione.)

le condizioni di Hardy-Cabello assumono la forma seguente:

$$\begin{aligned}
 \rho \text{---} \mathcal{A}_1 \text{---} \mathcal{A}_1 \text{---} e &= \rho \text{---} a_1 & \alpha_1 \text{---} a_1 & \alpha_1 \text{---} e = q_1 \\
 \rho \text{---} \mathcal{A}_0 \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} e &= \rho \text{---} a_0 & \alpha_0 \text{---} b_0 & \beta_0 \text{---} e = 0 \\
 \rho \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} e &= \rho \text{---} b_0 & \beta_0 \text{---} b_0 & \beta_0 \text{---} e = q_2
 \end{aligned}$$

La richiesta di commutatività sullo stato $|\rho\rangle$ si traduce nelle seguenti ulteriori condizioni tra gli stati e gli effetti in gioco:

$$\begin{aligned}
 \rho \text{---} \mathcal{A}_1 \text{---} \mathcal{A}_0 \text{---} e &= \rho \text{---} \mathcal{A}_0 \text{---} \mathcal{A}_1 \text{---} e \\
 \rho \text{---} \mathcal{B}_1 \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} e &= \rho \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} \mathcal{B}_1 \text{---} e \\
 \rho \text{---} \mathcal{A}_0 \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} e &= \rho \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} \mathcal{A}_0 \text{---} e \\
 \rho \text{---} \mathcal{A}_0 \text{---} \mathcal{B}_1 \text{---} e &= \rho \text{---} \mathcal{B}_1 \text{---} \mathcal{A}_0 \text{---} e \\
 \rho \text{---} \mathcal{A}_1 \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} e &= \rho \text{---} \mathcal{B}_0 \text{---} \mathcal{A}_1 \text{---} e \\
 \rho \text{---} \mathcal{A}_1 \text{---} \mathcal{B}_1 \text{---} e &= \rho \text{---} \mathcal{B}_1 \text{---} \mathcal{A}_1 \text{---} e
 \end{aligned}$$

Un caso che soddisfa tutti i vincoli riportati precedentemente è quello in cui gli stati si accoppiano agli effetti nel modo riportato di seguito:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \text{---} a_1 &= 0 \\
 \beta_1 \text{---} b_0 &= 0 \\
 \beta_1 \text{---} a_0 &= 1 \\
 \beta_0 \text{---} b_0 &= 1 \\
 \alpha_1 \text{---} b_0 &= 1 \\
 \beta_0 \text{---} a_0 &= 0 \\
 \alpha_0 \text{---} b_0 &= 0 \\
 0 \leq \alpha_0 \text{---} a_0 &< 1
 \end{aligned}$$

Tali condizioni impongono cioè che il gruppo di stati $|\alpha_1\rangle$ e $|\beta_0\rangle$ sia distinguibile dal gruppo di stati $|\alpha_0\rangle$ e $|\beta_1\rangle$ grazie al test \underline{b} il cui effetto b_0 (b_1) fa 1 e 0 rispettivamente sul primo e sul secondo gruppo (sul secondo e sul primo gruppo). È inoltre richiesto che il test \underline{a} sia in grado di distinguere perfettamente lo stato $|\beta_0\rangle$ dagli stati $|\alpha_1\rangle$ e $|\beta_1\rangle$ grazie all'effetto (a_0) ((a_1)) che fa 0 su $|\beta_0\rangle$ (su $|\alpha_1\rangle$ e $|\beta_1\rangle$) (vedi fig.7a).

In questo caso lo stato $|\rho\rangle$ può essere costruito semplicemente come uno stato miscela

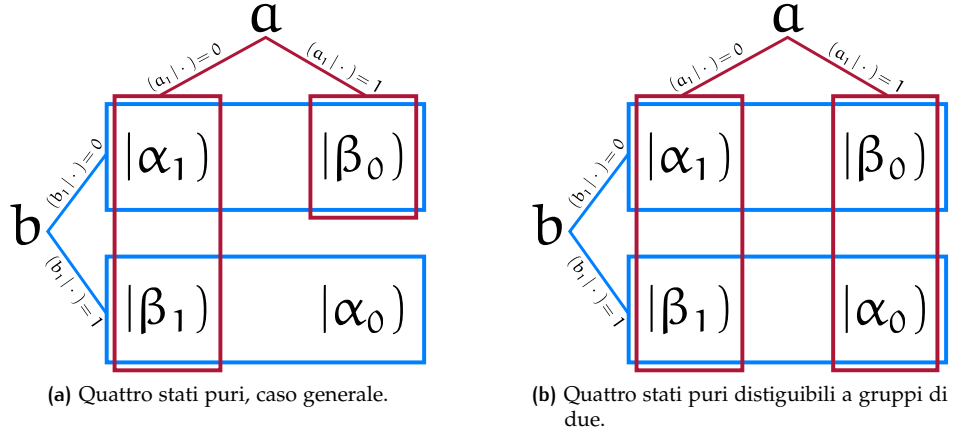


Figura 7.: Rappresentazione schematica delle relazioni che intercorrono fra gli stati e gli effetti nell'argomento di Hardy-Cabello per due test in cascata.

degli stati $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle, |\beta_0\rangle$ e $|\beta_1\rangle$ definiti inizialmente; nello specifico posto $|\rho\rangle \doteq p|\alpha_0\rangle + q|\alpha_1\rangle + r|\beta_0\rangle + s|\beta_1\rangle$, con $p + q + r + s = 1$ e $0 \leq p, q, r, s \leq 1$ si ottiene che

$$0 \leq p \leq \frac{1}{1 + (a_1 | \alpha_0)}$$

$$q = p (a_1 | \alpha_0)$$

$$r = \frac{(a_1 | \alpha_0)}{1 + (a_1 | \alpha_0)} - p (a_1 | \alpha_0)$$

$$s = \frac{1}{1 + (a_1 | \alpha_0)} - p$$

dove $0 < (a_1 | \alpha_0) \leq 1$, dal momento che $0 \leq (a_0 | \alpha_0) < 1$.

Il caso di una teoria classica

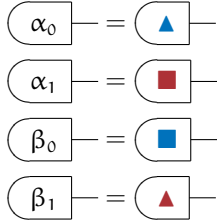
Risulta interessante studiare il caso per cui $(a_1 | \alpha_0) = 1$. In questa circostanza infatti si ha la situazione riportata in fig.7b, in cui ciascuno dei test \underline{a} e \underline{b} è in grado di discriminare un sottogruppo di due stati tra i quattro iniziali. Un caso del genere è facilmente riproducibile non appena si abbiano a disposizione quattro stati puri perfettamente discriminabili fra loro, infatti vale la seguente nota:

Lemma 3.11. *Per quattro stati puri normalizzati perfettamente distinguibili fra loro, esistono due test osservativi che ne distinguono gruppi di due.*

Dimostrazione. È banale: dati i quattro stati puri $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle$ per ipotesi esiste un test osservativo $\underline{a} \doteq \{(a_0 |, (a_1 |, (a_2 |, (a_3 |)\}$ che li distingue fra loro, cioè $(a_j | \alpha_i) = \delta_{ij}$. Ma allora è possibile costruire tramite coarse-graining il test $\underline{a}' \doteq \{(a_0 | \cup (a_1 |, (a_2 | \cup (a_3 |)\}$ che distingue gli stati $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$ dagli stati $|\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle$. Analogamente si può costruire $\underline{a}'' \doteq \{(a_0 | \cup (a_3 |, (a_1 | \cup (a_2 |)\}$ che distingue $|\alpha_0\rangle, |\alpha_3\rangle$ da $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$. \square

Nota. Si noti che non vale l'implicazione opposta a quella mostrata nel lemma precedente. Si potrebbe pensare che eseguendo in cascata i due test \underline{a}' e \underline{a}'' si possano distinguere fra loro gli stati $|\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle$, ma questo è vero solamente sotto l'ipotesi che il primo test che viene eseguito non disturbi gli stati.

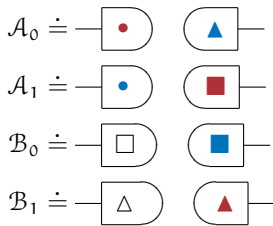
Quindi sotto l'ipotesi di avere quattro stati puri distinguibili fra loro è possibile riprodurre le probabilità di Hardy-Cabello. Si considerino infatti i seguenti stati



perfettamente distinguibili fra loro grazie al test costituito dagli effetti (Quadrato blu|, (Quadrato rosso|, (Triangolo blu|, (Triangolo rosso|. Grazie a questi effetti si possono costruire tramite coarse-graining gli effetti che selezionano il rosso ((•|), il blu ((•|), il quadrato ((□|) e il triangolo ((Δ|). Definendo lo stato $|\rho\rangle$ come

$$|\rho\rangle = \frac{1}{2}|\beta_0\rangle + \frac{1}{2}|\beta_1\rangle$$

e gli eventi $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ dell'argomento di Hardy-Cabello come



le probabilità di eq.(3.23)-eq.(3.25) assumono la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\beta_0\rangle\langle\mathcal{A}_0| + \frac{1}{2}|\beta_1\rangle\langle\mathcal{A}_0| &= q_1 = 0 \\ \frac{1}{2}|\beta_0\rangle\langle\mathcal{A}_1| + \frac{1}{2}|\beta_1\rangle\langle\mathcal{A}_1| &= 0 \\ \frac{1}{2}|\beta_0\rangle\langle\mathcal{B}_0| + \frac{1}{2}|\beta_1\rangle\langle\mathcal{B}_0| &= q_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

In un contesto operativo una teoria classica è caratterizzata dall'avere tutti i propri stati puri distinguibili fra loro,¹⁴ pertanto quanto si è appena mostrato è che una qualunque teoria classica con quattro stati puri perfettamente discriminabili non ammette un'interpretazione *localmente realista*.¹⁵ È però necessario fare due considerazioni.

I test \mathcal{A}, \mathcal{B} effettivamente commutano sullo stato misto $|\rho\rangle$. Altrettanto non si può però dire per gli stati puri che costituiscono $|\rho\rangle$. Si noti che il modello considerato può essere considerato equivalente ad un modello a variabili nascoste in cui il ruolo di variabili nascoste è giocato proprio dagli stati puri $|\beta_0\rangle, |\beta_1\rangle, |\alpha_0\rangle, |\alpha_1\rangle$. Questo porta pertanto alla seguente riflessione: un modello operativo in cui i test commutano, non implica che tali test commutino anche a livello di variabili nascoste. Questa mancanza di commutazione a livello dei λ rende quindi chiaro perchè è presente questo strano comportamento:

¹⁴ Dal punto di vista operativo una teoria classica non possiede tutti i test fra loro commutanti.

¹⁵ L'enfasi è stata aggiunta per sottolineare che in tale contesto l'espressione non vuole affermare effettivamente l'assenza di un realismo locale (non si è infatti nemmeno definita in maniera informale la nozione di località per una cascata di test), ma è semplicemente da intendersi come *vale l'argomento di Hardy-Cabello*.

la mancanza di commutazione può infatti essere vista come una perturbazione della variabile nascosta, il cui contenuto informativo viene distrutto tra un test e l'altro. In caso di test separati *space-like* in un modello con stato bipartito, la commutazione empirica implica invece anche la commutazione a livello nascosto, se si assume la covarianza e la λ -causalità del modello a variabili nascoste.¹⁶

Si noti comunque che l'osservazione precedente non risolve il problema riscontrato. Questo problema può essere sciolto osservando che si è utilizzato uno stato misto. Il tentativo del programma a variabili nascoste è descrivere gli stati *puri* come stati misti di una teoria più fine di quella quantistica (o operativa). In effetti se si restringe il problema ai soli stati puri, il problema scompare: in tal caso infatti lo stato puro $|\rho\rangle$ deve accoppiarsi con l'effetto $(b_0|$ in modo che $(b_0|\rho) = 1/2$. In tal modo si verifica la situazione per la quale $|\rho\rangle$ non è più distinguibile dagli altri stati puri in gioco, escludendo così le teorie classiche.

Da tale esempio si conclude pertanto che:

- A. la commutazione a livello empirico non implica quella a livello dei λ . Nel caso di stati bipartiti, se si assume la λ -causalità e la covarianza delle distribuzioni di probabilità a livello di variabili nascoste allora tale implicazione può essere mostrata. Si veda il lemma 4.6;
- B. l'utilità di stati misti nell'argomento di L. Hardy è dubbia.

3.4.2.2 Stato bipartito

Verrà ora considerato l'analogo operativo di un classico della letteratura: il caso bipartito. Sia $|\rho\rangle_{AB}$ uno stato per il sistema AB che faccia lo steering del proprio stato marginale $|\sigma\rangle_A \doteq (e|_B|\rho)_{AB}$. Siano $|\alpha\rangle_A$ e $|\alpha'\rangle_A$ due differenti decomposizioni convesse non triviali di $|\sigma\rangle_A$ tali che

$$p_0|\alpha_0\rangle_A + p_1|\alpha_1\rangle_A \doteq |\alpha\rangle_A \equiv |\sigma\rangle_A \equiv |\alpha'\rangle_A \doteq p'_0|\alpha'_0\rangle_A + p'_1|\alpha'_1\rangle_A$$

dove $|\alpha_0\rangle_A, |\alpha_1\rangle_A, |\alpha'_0\rangle_A$ e $|\alpha'_1\rangle_A$ sono stati normalizzati per il sistema A e $\sum_i p_i = 1, \sum_i p'_i = 1$. Dal momento che $|\rho\rangle_{AB}$ è uno stato steering esistono due test osservativi $\underline{b} \doteq \{(b_0|_B, (b_1|_B)\}$, $\underline{b}' \doteq \{(b'_0|_B, (b'_1|_B)\}$ per il sistema B tali che:

$$\begin{aligned} \rho \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \\ \text{B} \\ \text{---} \\ \text{b}_0 \end{array} &= p_0 \times \alpha_0 \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \end{array} \\ \rho \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \\ \text{B} \\ \text{---} \\ \text{b}_1 \end{array} &= p_1 \times \alpha_1 \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \end{array} \\ \rho \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \\ \text{B} \\ \text{---} \\ \text{b}'_0 \end{array} &= p'_0 \times \alpha'_0 \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \end{array} \\ \rho \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \\ \text{B} \\ \text{---} \\ \text{b}'_1 \end{array} &= p'_1 \times \alpha'_1 \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \end{array} \end{aligned}$$

¹⁶ Si veda in tal proposito il lemma 4.6.

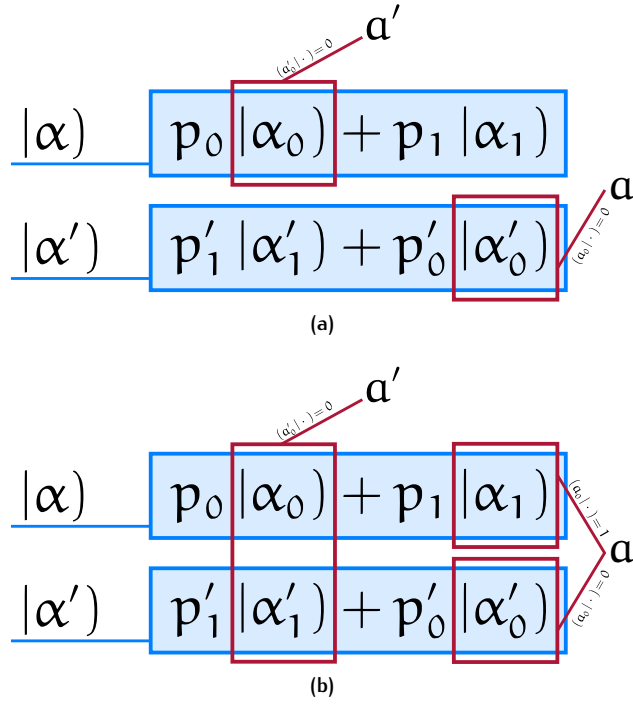


Figura 8.: Rappresentazione schematica delle relazioni che intercorrono fra gli stati e gli effetti dell'argomento di Hardy-Cabello per uno stato bipartito. Le fasce azzurre identificano le miscele $|\alpha\rangle_A$ e $|\alpha'\rangle_A$.

Siano inoltre $\underline{a} \doteq \{(a_0|_A, (a_1|_A)\}$, $\underline{a}' \doteq \{(a'_0|_A, (a'_1|_A)\}$ due test osservativi per il sistema A . Ci si chiede quali siano le restrizioni che tutti gli stati e gli effetti fin qui introdotti devono soddisfare affinché siano verificate le seguenti condizioni:

$$\left(\begin{array}{c} \text{A} \\ \rho \\ \text{B} \end{array} \right) \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array} = q_1 \quad (3.26)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{A} \\ \rho \\ \text{B} \end{array} \right) \begin{array}{c} a'_0 \\ b_0 \end{array} = 0 \quad (3.27)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{A} \\ \rho \\ \text{B} \end{array} \right) \begin{array}{c} a_0 \\ b'_0 \end{array} = 0 \quad (3.28)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{A} \\ \rho \\ \text{B} \end{array} \right) \begin{array}{c} a'_0 \\ b'_0 \end{array} = q_2 \quad (3.29)$$

con $q_1 < q_2$, che non sono altro che le condizioni di Hardy-Cabello del teorema 3.4. Le

eqs.(3.27)-(3.28) possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \rho \\ \rho \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{A} a'_0 \\ \xrightarrow{B} b_0 \end{array} &= p_0 \times \left(\alpha_0 \xrightarrow{A} a'_0 \right) = 0 \\ \left(\begin{array}{c} \rho \\ \rho \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{A} a_0 \\ \xrightarrow{B} b'_0 \end{array} &= p'_0 \times \left(\alpha'_0 \xrightarrow{A} a_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

evidenziando la necessità che valgano le seguenti uguaglianze (rappresentate schematicamente in figura 8a):

$$(a'_0 | \alpha_0)_A = 0 \quad (3.30)$$

$$(a_0 | \alpha'_0)_A = 0 \quad (3.31)$$

Ricordando l'azione dei test \underline{b} , \underline{b}' le eq.(3.26)-(3.29) assumono rispettivamente la forma:

$$p_1 \times \left(\alpha_1 \xrightarrow{A} a_1 \right) = q_1 \quad (3.32)$$

$$p'_0 \times \left(\alpha'_0 \xrightarrow{A} a'_0 \right) = q_2 \quad (3.33)$$

Sono state pertanto riscritte le condizioni di Hardy-Cabello in funzione di stati ed effetti di sistema singolo. Se la teoria operativa è convessa, dati due stati esistono anche tutte le loro miscele; per cui il problema può essere rivisto nel modo seguente: date le due miscele $|\alpha\rangle_A, |\alpha'\rangle_A$, in che modo si possono variare i parametri di randomizzazione p_0, p_1, p'_0, p'_1 affinché siano verificate le condizioni precedenti tenuto conto che $|\alpha\rangle_A \equiv |\alpha'\rangle_A$? Per risolvere il problema bisogna quindi soddisfare congiuntamente i vincoli per il sistema singolo, unitamente a delle condizioni di equivalenza tra le miscele, rispetto ai parametri di miscela. L'esistenza o meno di soluzioni sarà determinata dalle caratteristiche degli stati e degli effetti: i.e., da come si accoppiano fra loro. Le condizioni di equivalenza inerenti al problema si ricavano notando che $|\alpha\rangle_A \equiv |\alpha'\rangle_A$ implica $(c | \alpha)_A = (c | \alpha')_A \forall (c | \in \mathfrak{E}(A))$. Valgono quindi in particolare le uguaglianze $(a_0 | \alpha)_A = (a_0 | \alpha')_A, (a'_0 | \alpha)_A = (a'_0 | \alpha')_A$:¹⁷ i.e.,

$$\begin{aligned} p_0 \times \left(\alpha_0 \xrightarrow{A} a_0 \right) + p_1 \times \left(\alpha_1 \xrightarrow{A} a_0 \right) &= p'_0 \times \left(\alpha'_0 \xrightarrow{A} a_0 \right) + p'_1 \times \left(\alpha'_1 \xrightarrow{A} a_0 \right) \\ p_0 \times \left(\alpha_0 \xrightarrow{A} a'_0 \right) + p_1 \times \left(\alpha_1 \xrightarrow{A} a'_0 \right) &= p'_0 \times \left(\alpha'_0 \xrightarrow{A} a'_0 \right) + p'_1 \times \left(\alpha'_1 \xrightarrow{A} a'_0 \right) \end{aligned}$$

Sfortunatamente la risoluzione del problema è computazionalmente improponibile; è però possibile trovare una soluzione particolare. Si ipotizzi che valgano anche le condizioni rappresentate nell'immagine 8b: i.e.,

$$(a_1 | \alpha_1)_A = 0$$

$$(a'_0 | \alpha'_1)_A = 0$$

In questo caso se

$$0 \leq (a_0 | \alpha_0) < (a_0 | \alpha'_1) \leq 1$$

$$(a'_0 | \alpha_1) \neq 0$$

$$(a'_0 | \alpha'_0) \neq 0$$

¹⁷ Anlogamente valgono delle analoghe analoghe uguaglianze anche per gli effetti $(a_1 | \alpha), (a'_1 | \alpha)$: l'equivalenza è dovuta al fatto che $(a_0 | \alpha), (a_1 | \alpha)$ e $(a'_0 | \alpha), (a'_1 | \alpha)$ costituiscono rispettivamente i test osservativi completi \underline{a} e \underline{a}' .

è sempre possibile fare in modo che le due miscele siano uguali. Pertanto il modello non ammette interpretazione realista.

Vale pertanto il seguente lemma.

Lemma 3.12. *Una teoria operativa caratterizzata da:*

- A. *due decomposizioni convesse* $|\alpha\rangle_A \doteq p_0 |\alpha_0\rangle_A + p_1 |\alpha_1\rangle_A$, $|\alpha'\rangle_A \doteq p'_0 |\alpha'_0\rangle_A + p'_1 |\alpha'_1\rangle_A$ dello stato $|\sigma\rangle_A \in \mathfrak{S}(A)$;
- B. *un'effetto non nullo* $(\alpha'_0|$ sul quale gli stati $|\alpha_0\rangle_A$ e $|\alpha'_1\rangle_A$ fanno zero;
- C. *un test osservativo dicotomico* $\underline{a} \doteq \{(a_0|_A, (a_1|_A\}$ in grado di discriminare gli stati $|\alpha_1\rangle_A$, $|\alpha'_0\rangle_A$, e per il quale $0 \leq (a_0| \alpha_0\rangle_A < (a_0| ;)_A$ $\alpha'_1 \leq 1$
- D. *uno stato* $|\rho\rangle_{AB} \in \mathfrak{S}(AB)$ in grado di fare lo steering di $|\sigma\rangle_A$ in $\mathfrak{S}(A)$;

non ammette un'interpretazione localmente realista.

È interessante verificare se le condizioni del lemma precedente permettono di includere la meccanica quantistica nella trattazione. È facile verificare come questo non sia però possibile. Si prenda il caso in cui la teoria operativa in considerazione è la meccanica quantistica. Al sistema A è pertanto associato uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_A , in cui il cono degli stati è il cono degli operatori di classe traccia su \mathcal{H}_A al massimo di traccia unitaria, il cono degli effetti è costituito dagli operatori limitati non-negativi su \mathcal{H}_A con norma non superiore a uno, e in cui l'accoppiamento tra stati ed effetti è dato dalla regola di Born.¹⁸ Poichè $|\alpha_1\rangle_A, |\alpha'_0\rangle_A$ sono discriminabili dal test osservativo $\underline{a} \doteq \{(a_0|_A, (a_1|_A\}$ si ha senza perdita di generalità che:

$$\begin{aligned} (a_0 | \alpha'_0\rangle_A &= 0 & (a_0 | \alpha_1\rangle_A &= 1 \\ (a_1 | \alpha'_0\rangle_A &= 1 & (a_1 | \alpha_1\rangle_A &= 0 \end{aligned}$$

Indicando con α_1, α'_0 le matrici densità di $|\alpha_1\rangle_A, |\alpha'_0\rangle_A$ rispettivamente, e con P_{a_0}, P_{a_1} gli operatori rispettivamente associati agli effetti $(a_0|_A, (a_1|_A$, le relazioni precedenti tradotte nel linguaggio della meccanica quantistica implicano che:

$$\text{Tr}[P_{a_0} \alpha'_0] = 0 \qquad \text{Tr}[P_{a_0} \alpha_1] = 1 \qquad (3.34)$$

$$\text{Tr}[P_{a_1} \alpha'_0] = 1 \qquad \text{Tr}[P_{a_1} \alpha_1] = 0 \qquad (3.35)$$

La prima relazione di eq.(3.34) e la seconda uguaglianza di eq.(3.35) impongono rispettivamente che

$$\text{Supp } \alpha'_0 \cap \text{Supp } P_{a_0} = \emptyset \qquad \text{Supp } \alpha_1 \cap \text{Supp } P_{a_1} = \emptyset$$

mentre le altre che

$$P_{a_0} = Z_{\text{Supp } \alpha'_0} + W_{\text{Supp } \alpha'_0}^\perp \qquad P_{a_1} = Z_{\text{Supp } \alpha_1} + W_{\text{Supp } \alpha_1}^\perp$$

dove $Z_{\text{Supp } \alpha'_0}$ e $W_{\text{Supp } \alpha'_0}^\perp$ indicano rispettivamente il proiettore sul supporto della matrice densità α'_0 e un operatore non negativo con supporto ortogonale a $\text{Supp } \alpha'_0$ (analogamente per $Z_{\text{Supp } \alpha_1}$ e $W_{\text{Supp } \alpha_1}^\perp$). Dovendo essere $P_{a_0} + P_{a_1} = Z_{\text{Supp } \alpha'_0} + Z_{\text{Supp } \alpha_1} + W_{\text{Supp } \alpha'_0}^\perp + W_{\text{Supp } \alpha_1}^\perp = \mathbb{1}$, da queste ultime condizioni si conclude che

$$\text{Supp } \alpha'_0 \cap \text{Supp } \alpha_1 = \emptyset$$

¹⁸ Si veda [10] per informazioni su come ricavare la meccanica quantistica dal formalismo operativo.

altrimenti, visto che $W_{\text{Supp } \alpha'_0}^\perp$ e $W_{\text{Supp } \alpha_1}^\perp$ sono non negativi, non si riesce a soddisfare la condizione di normalizzazione.

D'altro canto si sa che l'effetto $(\alpha'_0)_\lambda$ fa zero sugli stati $(\alpha_0)_{\lambda'}$, $(\alpha'_1)_\lambda$; ciò implica che

$$\text{Supp } \alpha'_1 \cap \text{Supp } P_{\alpha'_0} = \text{Supp } \alpha_0 \cap \text{Supp } P_{\alpha'_0} = \emptyset \quad (3.36)$$

dove è stata utilizzata una notazione analoga alla precedente.

Il fatto che $(\alpha)_\lambda$ e $(\alpha')_\lambda$ siano due decomposizioni convesse dello stesso stato impone che i rispettivi operatori quantistici abbiano lo stesso supporto; in simboli:

$$\text{Supp } \alpha = \text{Supp } \alpha_0 + \text{Supp } \alpha_1 = \text{Supp } \alpha'_0 + \text{Supp } \alpha'_1 = \text{Supp } \alpha'$$

Tale relazione unita a quella di eq.(3.36) mostra che

$$\begin{aligned} \text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap (\text{Supp } \alpha_0 + \text{Supp } \alpha_1) &= \text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap (\text{Supp } \alpha'_0 + \text{Supp } \alpha'_1) \\ \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ \text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap \text{Supp } \alpha_1 & \qquad \qquad \qquad \text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap \text{Supp } \alpha'_0 \end{aligned}$$

Sfruttando l'ortogonalità dei supporti di α_1 e α'_0 si mostra facilmente che:

$$\begin{aligned} (\text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap \text{Supp } \alpha_1) \cap (\text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap \text{Supp } \alpha'_0) &= \\ &= \text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap (\text{Supp } \alpha_1 \cap \text{Supp } \alpha'_0) = \emptyset \end{aligned}$$

Gli insiemi $\text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap \text{Supp } \alpha_1$ e $\text{Supp } P_{\alpha'_0} \cap \text{Supp } \alpha'_0$ sono quindi uguali e disgiunti: sono cioè entrambi l'insieme vuoto. Questo però implica che $\text{Tr}[P_{\alpha'_0} \alpha_1] = \text{Tr}[P_{\alpha'_0} \alpha'_0] = 0$, cioè $(\alpha'_0 | \alpha_1)_\lambda = (\alpha'_0 | \alpha'_0)_\lambda = 0$, contro le ipotesi iniziali.

Si conclude pertanto che il modello trovato garantisce l'assenza di realismo locale, ma non per la meccanica quantistica, visto che il formalismo quantistico esclude che un argomento del genere possa essere applicato.

4

FREE WILL

4.1	Gli assiomi	76
4.1.1	Gli assiomi SPIN e TWIN	76
4.1.2	L'assioma MIN	77
4.2	L'ipotesi di free will	79
4.2.1	Free will, modelli operazionali e formalismo di A. Brandenburger e N. Yanofsky	80
4.2.1.1	Free will Vs causalità	83
4.2.1.2	Free will per modelli a variabili nascoste	84
4.3	Il paradosso di Kochen-Specker	85
4.4	La consistenza interna degli assiomi	87
4.4.1	L'universo esagonale	87
4.4.2	Modello con agente per gli assiomi SPIN, TWIN, MIN	89
4.5	Il teorema del free will	89
4.6	Il caso stocastico e le posizioni contrarie	91
4.7	"What does the FWT actually prove?"	95

VERSO la fine del 2006 venne formulato un nuovo teorema no-go: il *teorema del free will*. Esso è principalmente – ma non necessariamente – indirizzato verso l'interpretazione della meccanica quantistica alla luce di una teoria a variabili nascoste. Immediata fu la reazione in letteratura, vista la portata di quanto gli autori J. H. Conway e S. Kochen pretendevano di dimostrare. Una formulazione informale venne data in [13], e recita:

[...] if indeed there exist any experimenters with a modicum of free will, then elementary particles must have their own share of this valuable commodity.

Formulazione informale del teorema del free will

In altre parole se alcuni sperimentatori sono in grado di comportarsi in un modo che non può essere completamente determinato dalla loro storia passata, allora anche il comportamento delle particelle lo è rispetto al proprio passato. Per quanto tale formulazione possa apparire sconvolgente, ermetica o al limite del *non-sense*, tale teorema ha ricevuto una particolare attenzione dalla critica, per lo più a sfavore. Il motivo di tale scontro, come si vedrà, è dovuto ad un'interpretazione forse ambigua del concetto di no-signaling.

Il teorema esiste in due formulazioni differenti: una debole (è la versione iniziale del 2006 [13]) e una forte (pubblicata nel 2009 [12] nel tentativo di affrontare alcuni problemi indicati da certi autori [35]). In questa sede si parlerà della seconda versione, mentre la prima verrà solamente accennata.

Il teorema del free will (in seguito FWT da *Free Will Theorem*) cerca di unire tre dei risultati più controintuitivi della fisica del 1900:

Finalità del teorema

- l'esistenza in meccanica quantistica di stati entangled;
- la relatività dell'ordinamento temporale dei fenomeni in funzione del sistema di riferimento inerziale;
- il teorema di Kochen-Specker.

Grazie a questi fenomeni è possibile giungere, a detta degli autori, al risultato finale per tutte le teorie a variabili nascoste. Il FWT, che come detto è di fatto un teorema no-go, si inserisce prepotentemente nell'ambito del programma di interpretazione a variabili nascoste, con la pretesa di chiuderlo una volta per tutte. Uno dei punti di forza dell'argomento è il non far esplicito riferimento alla meccanica quantistica: i due assiomi che sembrano essere legati indissolubilmente con il formalismo quantistico, e su cui tutto l'argomento si basa, sono in realtà solo richieste di tipo probabilistico sui risultati di determinati esperimenti; in questo modo il risultato del teorema può in linea di principio essere applicato anche a teorie probabilistiche più generali, e in particolare può essere facilmente inserito nel framework introdotto in §3.1.1.

In questo capitolo si proverà a spiegare il risultato di J. H. Conway e Kochen e le posizioni dei loro detrattori, con l'obiettivo di chiarire il motivo di tale scontro al fine di chiuderlo definitivamente. Verranno inoltre esposte *en passant* alcune considerazioni sul free will in relazione al framework introdotto nel capitolo 3.

4.1 GLI ASSIOMI

L'argomento di J. H. Conway e S. Kochen si basa su tre assiomi che ora verranno estensivamente illustrati e a cui gli autori fanno brevemente riferimento con i termini di *SPIN*, *TWIN*, e *MIN*.

4.1.1 Gli assiomi SPIN e TWIN

SPIN Nella sua formulazione originaria l'assioma SPIN fa esplicitamente riferimento ad una peculiarità della meccanica quantistica, ma può essere riformulato in modo da far solamente riferimento a delle misure di probabilità.

Assioma (SPIN). *I possibili risultati della misura congiunta delle componenti quadrate dello spin di una particella a spin 1 lungo tre direzioni ortogonali sono $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$.*

Si noti subito che in meccanica quantistica tale misura congiunta è ammissibile: i.e., le osservabili S_x^2 , S_y^2 , S_z^2 , con x , y , z tre direzioni ortogonali, commutano sugli stati di particella singola di spin totale 1. Inoltre $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2 \cdot \mathbb{1}$, pertanto la somma degli autovalori dei singoli operatori quadrati deve essere uguale a 2, e tenuto conto che ognuno può essere 0 o 1 si verifica istantaneamente che vale l'assioma SPIN.

TWIN L'assioma TWIN prende invece in considerazione la possibilità per la meccanica quantistica di generare stati entangled di due particelle con spin 1; in modo tale che, quando viene eseguita la misurazione di una delle componenti quadrate dello spin sulle due particelle lungo una stessa direzione, queste danno gli stessi risultati. Questa richiesta può essere banalmente soddisfatta generando uno stato di singoletto per particelle a spin 1.

Assioma (TWIN). *Si considerino due particelle di spin 1 in uno stato di singoletto. Si supponga che lo sperimentatore A esegua una misurazione delle componenti quadrate dello spin della particella a lungo le direzioni ortogonali (x, y, z) , e che lo sperimentatore B misuri su b una componente quadrata lungo una direzione w . Se w è una delle direzioni x , y , z , lo sperimentatore B otterrà lo stesso risultato della corrispondente misura eseguita da A.*

L'assioma così esposto sostiene che tale proprietà sia valida per un *continuo* di direzioni; in realtà, come si vedrà successivamente, al fine della dimostrazione basterà restringersi ad un numero finito di direzioni.

In teoria è possibile riscrivere gli assiomi SPIN e TWIN epurandoli dai concetti di spin

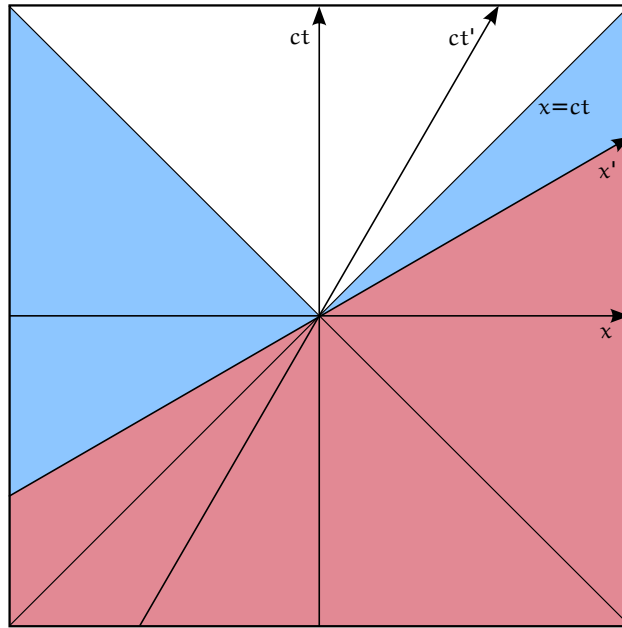


Figura 9.: In **azzurro** è riportato ciò che sta all'esterno del cono luce futuro di un evento situato all'origine degli assi. In **rosso** invece è raffigurato quello che per l'origine è passato per un fissato sistema di riferimento inerziale. Come si vede chiaramente dalla figura il passato per tutti i sistemi di riferimento inerziali coincide con l'esterno del cono luce futuro.

e di stato di singoletto, al fine di renderli delle semplici condizioni sulle probabilità che certi test soddisfano su uno stato opportuno. L'utilità di ciò è da ritrovarsi nella volontà di riscrivere il FWT per una generica teoria probabilistica operativa, in modo che si possano successivamente mettere in relazione le proprietà di un modello operativo con la validità di un argomento analogo a quello di J. H. Conway e S. Kochen. Tale programma, come si vedrà, è però molto più impegnativo rispetto agli analoghi del capitolo 3, e pertanto esulterà dagli obiettivi di queste pagine.

4.1.2 L'assioma MIN

Una delle peculiarità introdotte dalla teoria della relatività speciale è che l'ordine temporale degli eventi dipende dalla scelta del sistema di riferimento: se due eventi hanno una separazione *space-like* essi appariranno in un certo ordine cronologico in certi sistemi di riferimento, e nell'ordine opposto in altri. Come si è già avuto modo di dire in §2.3, è sempre tacitamente assunto un principio di causalità temporale secondo il quale il futuro non può influenzare il proprio passato; in forma relativistica tale affermazione può assumere le due seguenti equivalenti formulazioni:

Ipotesi di no-signaling

- A. un evento non può essere influenzato da qualcosa che, in ogni sistema di riferimento inerziale, è temporalmente successivo;
- B. un evento non è influenzato da qualcosa situato nel proprio cono luce futuro.

Dato un evento siano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 le regioni dello spazio tempo in connessione causale con esso secondo le formulazioni B e A. Infatti, come si può vedere in figura 9, nel caso B ciò che sta al di fuori del cono luce futuro di un certo evento può essere identificato in un piano (x, ct) con l'insieme $\Gamma_1 \doteq \{(x, ct) \in \mathbb{R}^2 \mid c^2t^2 - x^2 < 0 \vee t < 0\}$.

Secondo la definizione A i punti dello spazio tempo da prendere in considerazione sono invece quelli dell'insieme $\Gamma_2 \doteq \{(x, ct) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists v, |v| < c, \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) < 0\}$. Per mostrare che A e B sono equivalenti basta verificare il seguente lemma.

Lemma 4.1. *Gli insiemi Γ_1, Γ_2 coincidono.*

Dimostrazione. Per dimostrarlo basta verificare le due inclusioni $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ e $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$.

$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$: cioè $\varkappa \doteq (x, ct) \in \Gamma_1 \implies \varkappa \in \Gamma_2$. Per mostrare l'implicazione si prenda un \varkappa appartenente a Γ_1 , cioè che soddisfi $c^2t^2 - x^2 < 0$ oppure $t < 0$, e si trovi un v , con $|v| < c$, che soddisfi la disuguaglianza $\gamma(t - \frac{v}{c^2}x) < 0$. Abbiamo quindi due casi:

$c^2t^2 - x^2 < 0$: la soluzione è riportata nella tabella seguente

	$t < 0$	$t = 0$	$t > 0$
$x < 0$	$x - ct < 0 \wedge v < \frac{ct^2}{x}$	$v < 0$	$x + ct < 0 \wedge v < \frac{ct^2}{x}$
$x > 0$	$x + ct > 0 \wedge v > \frac{ct^2}{x}$	$v > 0$	$x - ct > 0 \wedge v > \frac{ct^2}{x}$

$t < 0$: la disuguaglianza $\gamma(t - \frac{v}{c^2}x) < 0$ è soddisfatta da tutti i v tali che

$$v \cdot x > 0 \quad \text{con } |v| < c$$

$\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$: cioè $\varkappa \doteq (x, ct) \in \Gamma_2 \implies \varkappa \in \Gamma_1$. Per ipotesi $\forall \varkappa \doteq (x, ct) \in \Gamma_2, \exists v$ con $|v| < c$ tale che $\gamma(t - \frac{v}{c^2}x) < 0$. Il caso $t < 0$ è banale visto che è esattamente una delle condizioni affinché \varkappa appartenga a Γ_1 . Se $t \geq 0$, visto che $0 \leq \frac{v}{c} < 1$, si ha che $ct - \frac{v}{c}x > ct - x$. Ma per ipotesi $ct - \frac{v}{c}x < 0$ e quindi $ct - x < 0$. D'altro canto visto che per ipotesi $t \geq 0, x > \frac{c^2t}{v}$ e ricordando che vale sempre $|v| < c$ si ha anche che $ct + x > ct + \frac{c^2t}{v} > 0$. Quest'ultima disuguaglianza unita alla precedente costituiscono una condizione sufficiente affinché $c^2t^2 - x^2 < 0$ e quindi anche in questo caso $\varkappa \in \Gamma_1$

□

Ipotesi di free will

Altra condizione in genere tacitamente assunta è il considerare gli sperimentatori in grado di scegliere liberamente gli esperimenti da condurre; più precisamente: la scelta dell'esperimento da parte degli sperimentatori non è funzione del loro passato. L'unione di queste due richieste, che sono di fatto sempre assunte, portano alla formulazione del seguente assioma.

Assioma (MIN). *Si assuma che gli esperimenti eseguiti da A e B abbiano una separazione space-like. Allora lo sperimentatore B può scegliere una qualunque direzione w per la misurazione di una componente quadrata dello spin, e la risposta a di A è indipendente da tale scelta; e viceversa.*

Dovrebbe apparire chiaro che l'assioma precedente può essere visto come la composizione di due richieste:

- * la richiesta di free will da parte di ogni sperimentatore nella scelta del setting del proprio esperimento. Richiedere che gli sperimentatori siano dotati di free will, coincide con l'accettare quello a cui da qui in poi ci si riferirà con l'espressione *ipotesi di free will*
- * la necessità che sia verificato il principio di ordinamento causale temporale citato precedentemente; esiste infatti un certo sistema di riferimento in cui A esegue il

proprio esperimento prima di B, pertanto in questa situazione la risposta a non può dipendere dalla scelta di B che risulta essere successiva (e analogamente per B).¹

4.2 L'IPOTESI DI FREE WILL

Nell'assioma MIN si è esposto in modo informale del concetto di free will, ma non lo si è formalizzato in modo esaustivo. Si proverà ora a chiarire questo aspetto.

Il concetto di free will è un argomento delicato per gli inevitabili strascichi metafisici a cui un'analisi di tale discorso porterebbe. In italiano potrebbe essere tradotto con l'espressione *libero arbitrio*, cioè la facoltà dell'uomo di autodeterminarsi, cioè di scegliere consapevolmente ed autonomamente tra possibilità differenti. [1] L'argomento sarebbe filosoficamente vastissimo, ma nel seguito si tratterà solo un piccolo ambito della questione, l'unico di cui ha senso discutere in questa sede: free will inerentemente ad un esperimento. Quello al quale ci si riferisce è senz'altro collegato al concetto di determinismo e potrebbe a prima vista sembrare contraddittorio con questo: che senso ha parlare di free will in un universo deterministico? Da un lato il concetto di causalità (al quale quello di determinismo è inestricabilmente legato) è principio fondante della scienza, dall'altro immaginare un mondo senza la possibilità di scelta/libertà da parte dell'individuo è in ultima istanza sconcertante.² Nonostante ciò non ci si porrà il problema di affermare se tale coesistenza è logicamente fondata o meno, e ci si limiterà ad alcune considerazioni dando per assunto che abbia senso parlare di free will in un contesto deterministico e/o probabilistico.

Nella letteratura scientifica il concetto di free will è visto come la libertà dello sperimentatore di eseguire un qualunque esperimento, o, in maniera più precisa, la possibilità di scelta del setting di un esperimento svincolata da qualunque cosa situata nel passato. L'immersione di tale affermazione in un framework relativistico assume le due seguenti forme fra loro equivalenti:³

Free will in fisica

Definizione 4.1 (Free will (1)). *Uno sperimentatore è detto dotato di free will se la scelta del test da eseguire è indipendente da qualunque cosa al di fuori del cono luce futuro dell'apparato.*

Definizione 4.2 (Free will (2)). *Uno sperimentatore è detto dotato di free will se la scelta del test da eseguire è indipendente da qualunque cosa situata nel passato dell'apparato rispetto a un qualsiasi sistema di riferimento inerziale.*

In questo modo sorge spontanea la domanda: cosa si intende con il termine indipendente? Il senso è chiaro se la definizione viene immersa in un contesto funzionale: si supponga che associato ad ogni sperimentatore in un determinato punto spazio-temporale esista una funzione S che restituisca come *valore* l'esperimento che lo sperimentatore eseguirà. La richiesta di indipendenza nella formulazione delle definizioni 4.1 e 4.2 è equivalente ad affermare che tale funzione non esiste. Oppure, equivalentemente, che se tale funzione S esiste essa è indipendente dal passato dello sperimentatore (in un qualunque sistema di riferimento inerziale). Quest'ultima è esattamente l'accezione a cui gli autori del FWT si riferiscono parlando di free will; pertanto quando si parlerà di free will inerentemente al FWT varrà la seguente definizione:

Free will nel FWT

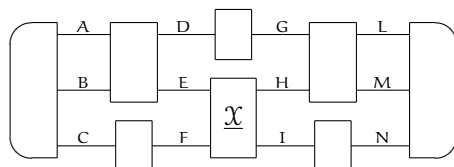
- 1 Dal momento che il principio di ordinamento causale temporale è collegato con la richiesta che l'informazione non si propaghi a velocità infinita (vedi §2.3), la formulazione originaria [13] preferiva riferirsi esplicitamente a questo principio, chiamato brevemente dagli autori con il termine FIN. L'assioma MIN della cosiddetta formulazione forte del FWT [12] è di fatto equivalente all'assunzione congiunta di FIN con la richiesta di free will degli sperimentatori.
- 2 Oltre che fatale al concetto stesso di etica: senza libertà non ci sarebbe più responsabilità nelle scelte, dal momento che le azioni sarebbero inevitabilmente necessarie; le azioni virtuose perderebbero di merito, e i crimini non sarebbero imputabili.
- 3 Sull'equivalenza si vedano le considerazioni fatte precedentemente parlando dell'assioma MIN

Definizione 4.3 (Free will nel FWT). *Uno sperimentatore in un certo punto dello spazio-tempo è dotato di free will se non esiste alcuna funzione S che sia in grado di restituire il setting dell'esperimento che esegue, o, nel caso che esista, è indipendente da qualunque cosa situata al di fuori del cono luce futuro dello sperimentatore.*

4.2.1 Free will, modelli operazionali e formalismo di A. Brandenburger e N. Yanofsky

Nonostante la definizione 4.3 sia senz'altro sufficiente per enunciare e dimostrare il FWT, ci si chiede ora se sia possibile inserire il concetto di free will in un formalismo operazionale. La traslazione diretta della definizione come è stata espressa finora trova difficile attuazione poiché in una teoria operazionale non è mai stato introdotto il concetto di spazio, tempo, futuro, passato – se non in maniera molto informale – che vengono invece utilizzati nella formulazione standard per mettere in relazioni gli eventi fra loro. In una teoria operazionale le relazioni sono stabilite solamente dai collegamenti: la presenza di un filo che unisce l'output di un test con l'input di un altro è l'unico parametro inerente la relazione fra due test. La definizione che si vuole formulare vuole essere un parallelo operazionale della 4.1 (o equivalentemente della 4.2) e pertanto con essa dovrà inevitabilmente presentare delle analogie: per far ciò si dovrà necessariamente iniziare valutando come può essere introdotto il concetto di spazio-tempo in un framework operazionale. Ovviamente la definizione definitiva dovrà abbandonare tutti i riferimenti ad elementi che non sono parte della teoria: e.g., spazio, tempo, ordinamenti temporali.

Dal momento che il framework introdotto nel capitolo 3 è limitato solamente ad un modello, e non ad una teoria nel suo complesso, si inizi assegnando un modello di circuito (vedi §3.1 per il concetto di modello di un circuito operazionale): e.g., nel seguito ci si riferisca sempre al seguente modello, e ci si concentri sul segnaposto di test identificato con il segno \mathcal{X} :



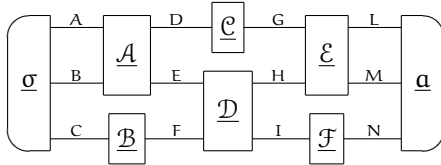
Ci si sta ponendo la seguente domanda: in che senso lo sperimentatore è libero nella scelta del test da mettere in \mathcal{X} ?⁴

In una teoria operazionale quello che più si avvicina al concetto usuale di ordinamento temporale è il collegamento sequenziale dei test: i.e., per una teoria operazionale causale l'evento A precede l'evento B può essere traslato in il test \underline{A} è collegato come input al test \underline{B} .⁵ Se uno stato $|\sigma\rangle$ ed un effetto $\langle a|$ sono collegati, in una teoria causale può aver quindi senso l'affermazione lo stato $|\sigma\rangle$ precede l'effetto $\langle a|$, dal momento che un effetto segue sempre uno stato a cui è connesso. Pertanto nel modello operazionale considerato precedentemente, si potrebbe affermare, ricalcando lo spirito delle definizioni usuali di free will, che lo sperimentatore è libero di scegliere quale test mettere al posto di \mathcal{X} se può farlo indipendentemente dallo stato che ha collegato come input. Bisognerebbe pertanto prendere tutti i test che si possono mettere in \mathcal{X} , collegarli a qualunque stato e vedere che le scelte sono indipendenti l'una dall'altra: ciò però implicherebbe il cambio del modello operazionale in considerazione. È necessario cambiare percorso, e un modo possibile è quello di lavorare con le slice globali del circuito del modello.

⁴ Ovviamente limitato ai test consentiti dal modello.

⁵ Un test \underline{A} è collegato come input ad un test \underline{B} se esiste un percorso di input-output che termina in \underline{B} e che comprenda al suo interno \underline{A} . Si noti pertanto che un'espressione "il test \underline{A} è collegato come input al test \underline{B} " non si limita al solo caso in cui un output di \underline{A} è direttamente connesso ad un input di \underline{B} . La definizione si estende banalmente al caso dell'output.

Come si sa in una teoria operativa una slice globale divide il circuito in due parti: quella di sinistra equivalente ad uno stato, e quella di destra equivalente ad un effetto (vedi §2.2.1). Al fine di semplificare il riferimento ai singoli box del circuito, nel modello operativo in considerazione si inseriscano dei test ammissibili come nella figura seguente:



dove gli altri test ammissibili al posto di \underline{A} sono \underline{A}' , \underline{A}'' , ...; al posto di \underline{B} sono \underline{B}' , \underline{B}'' , ...; e così via. Si noti che il box indicato precedentemente con il segnaposto \underline{X} è ora prerogativa dei test \underline{D} , \underline{D}' , \underline{D}'' , ... Tutte le possibili slice globali che mantengono il test \underline{D} nella metà di circuito considerabile come effetto sono quelle riportate in figura 10. In quest'ottica, per il modello in considerazione, tutti i possibili stati collegabili ad un effetto costituito da \underline{D} sono quelli costituiti dalle parti a sinistra della figura citata, al variare di tutti i test ammissibili per ogni box (pertanto anche con \underline{A}' , \underline{A}'' , ... al posto di \underline{A} ; e così via).

Il free will dello sperimentatore nella scelta di \underline{D} può quindi essere espresso, sempre per il modello operativo in considerazione, con la seguente condizione:⁶

$$\Pr[\underline{D} \mid \sigma, \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}] = \Pr[\underline{D} \mid \sigma', \underline{A}', \underline{B}', \underline{C}']$$

per ogni $\sigma, \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \sigma', \underline{A}', \underline{B}', \underline{C}'$ test ammissibili per il modello operativo. Infatti l'insieme costituito da $\sigma, \sigma', \dots, \underline{A}, \underline{A}', \dots, \underline{B}, \underline{B}', \dots, \underline{C}, \underline{C}', \dots$, è l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i test ammissibili che possono rientrare a far parte di uno degli stati individuati dalle slice globali di figura 10.

Il discorso precedente può essere giustificato anche nel modo seguente: una slice globale identifica quella che in una teoria causale è l'analogo di una superficie di tipo *space-like*, cioè quello che in un particolare sistema di riferimento può essere considerato il *presente*. [24] Fissata quindi una slice globale, affermare che la scelta del test \underline{D} è indipendente dalla scelta dei test situati nella sezione sinistra della slice, equivale in un certo senso ad affermare che in quel particolare sistema di riferimento identificato dalla slice in questione la scelta di \underline{D} non dipende dalla scelta dei test che stanno nel suo passato. Se questo vale per tutte le slice globali che mantengono \underline{D} parte di un effetto, non si è fatto altro che affermare che \underline{D} è indipendente dalla scelta di tutti gli altri test situati nel suo passato per ogni sistema di riferimento. Si proceda pertanto a dare la seguente definizione, utile per la formulazione della successiva definizione di free will.

Definizione 4.4 (Precedenza di un test). *Dato un modello operativo, il test \underline{A} è detto che precede il test \underline{B} se esiste una slice globale che lasci \underline{A} a sinistra e \underline{B} a destra.*

È importante notare che affinché l'analogia con la definizione 4.2 sia completa, è necessario richiedere che anche gli outcome di questi test non influenzino la scelta di \underline{D} .

Con il conforto della considerazione del paragrafo precedente, la quale mostra come nel caso di un modello operativo causale (dove è permesso introdurre un riferimento temporale) sia possibile collegare intuitivamente la definizione 4.2 con l'idea che i test possano essere scelti indipendentemente da quanto accade prima, è possibile proseguire con la definizione finale di free will per una teoria operativa:

⁶ Si sta qui utilizzando la notazione che finora è stata utilizzata solo per i test che commutano; è stata fatta questa scelta per evitare di usare il simbolo \circ che avrebbe appesantito in maniera veramente eccessiva la notazione: $\Pr[\underline{D} \mid \sigma, \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}]$ diverrebbe infatti $\Pr[\underline{D} \mid (\mathcal{C}_{DE, GH} \otimes \mathcal{J}_{EF, HI}) \circ (\underline{A}_{AB, DE} \otimes \underline{B}_{C, F}) \circ \sigma]$

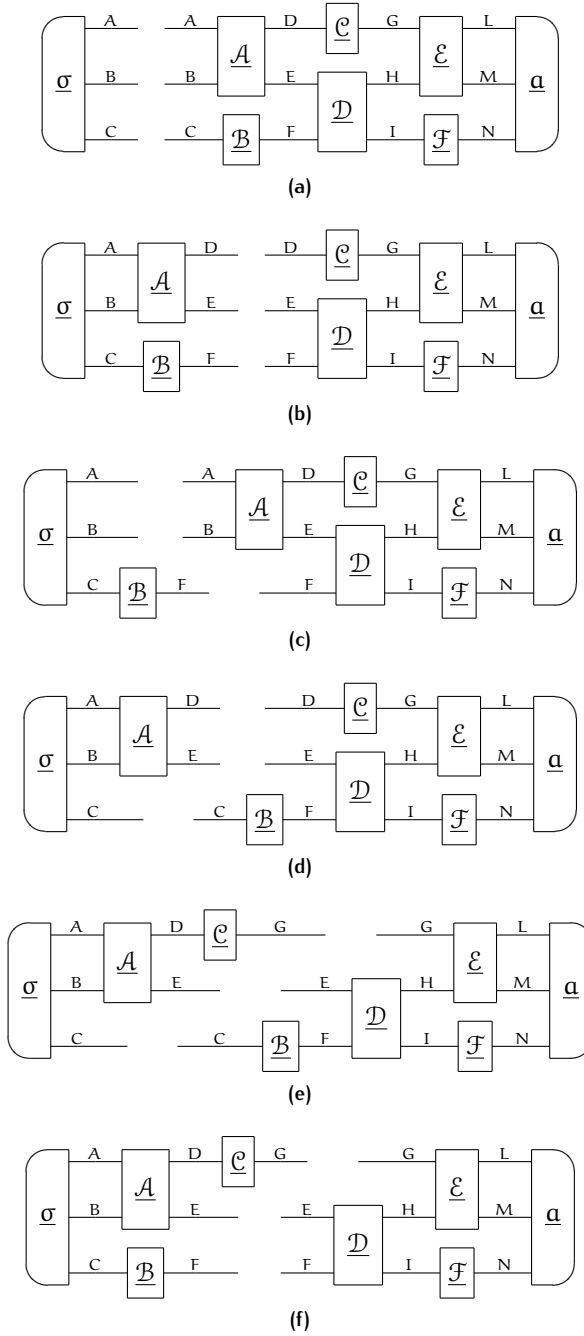


Figura 10.: Rappresentazione di tutte le possibili slice globali che mantengono il test \mathcal{D} nella metà di circuito equivalente ad un effetto.

Definizione 4.5 (Free will per un modello operativo). *Un modello in una teoria operativa è detto che gode di free will se per ogni test la probabilità della sua scelta non è condizionata dai test a lui precedenti.*

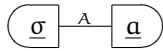
Per poter fare tutto il discorso proposto finora è necessario poter parlare delle probabilità di scelta di un determinato test all'interno di un modello: da questo si capisce la necessità del framework introdotto nel capitolo 2.

4.2.1.1 Free will Vs causalità

Verrà ora mostrato un possibile risultato per un modello di una teoria operativa che soddisfa la proprietà di free will.

Lemma 4.2 (Free will Vs causalità). *Una modello operativa che gode della proprietà di free will è anche causale.*

Dimostrazione. Si consideri un modello costituito da una preparazione e da un'osservazione come nel diagramma successivo:⁷



La probabilità che il test preparativo presenti il verificarsi dell'evento i -esimo (σ_i) è data per definizione da $\Pr[\sigma_i | \underline{\sigma}, \underline{\alpha}]$. Usando la definizione di probabilità condizionata si trova immediatamente che

$$\Pr[\sigma_i | \underline{\sigma}, \underline{\alpha}] = \frac{\Pr[\sigma_i, \underline{\alpha} | \underline{\sigma}]}{\Pr[\underline{\alpha} | \underline{\sigma}]} = \frac{\Pr[\sigma_i | \underline{\sigma}] \times \Pr[\underline{\alpha} | \underline{\sigma}, \sigma_i]}{\Pr[\underline{\alpha} | \underline{\sigma}]}$$

Visto che nel modello in esame per ipotesi vale la proprietà di free will $\Pr[\underline{\alpha} | \underline{\sigma}]$ e $\Pr[\underline{\alpha} | \underline{\sigma}, \sigma_i]$ non dipendono dalla scelta del test preparativo $\underline{\sigma}$ e dall'outcome $|\sigma_i\rangle$, pertanto sono uguali e si conclude quindi che:

$$\Pr[\sigma_i | \underline{\sigma}, \underline{\alpha}] = \Pr[\sigma_i | \underline{\sigma}] \quad (4.1)$$

Ragionando adesso sulla probabilità che si verifichi l'evento (α_j) per il test osservativo $\underline{\alpha}$ si ottiene in maniera analoga che

$$\Pr[\alpha_j | \underline{\sigma}, \underline{\alpha}] = \frac{\Pr[\alpha_j, \underline{\sigma} | \underline{\alpha}]}{\Pr[\underline{\sigma} | \underline{\alpha}]} = \frac{\Pr[\alpha_j | \underline{\alpha}] \times \Pr[\underline{\sigma} | \underline{\alpha}, \alpha_j]}{\Pr[\underline{\sigma} | \underline{\alpha}]}$$

In questo caso però $\Pr[\underline{\sigma} | \underline{\alpha}, \alpha_j]$ e $\Pr[\underline{\sigma} | \underline{\alpha}]$ non è detto siano uguali dato che il test osservativo $\underline{\alpha}$ ora segue $\underline{\sigma}$; pertanto in generale:

$$\sum_i \Pr[\sigma_i, \alpha_j | \underline{\sigma}, \underline{\alpha}] = \Pr[\alpha_j | \underline{\sigma}, \underline{\alpha}] \quad (4.2)$$

Insieme eq.(4.1) ed eq.(4.2) costituiscono la definizione 2.20 di causalità. \square

Tale implicazione mostra come, limitatamente ad un modello operativo, il postulato di non-signaling dal futuro (altrimenti detto di causalità) possa essere dedotto da un altro principio: quello di free will per il modello in esame.

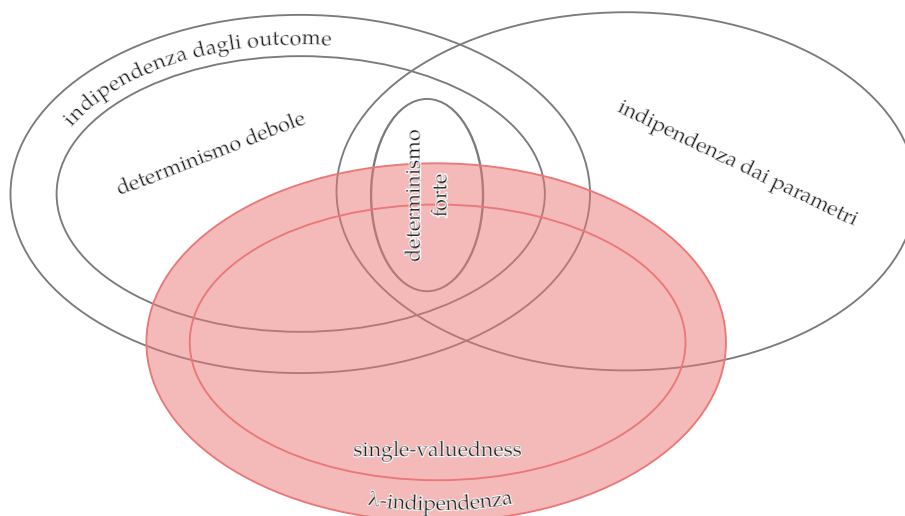


Figura 11.: Nell'approccio standard della trattazione delle variabili nascoste ci si limita in genere a considerare i modelli che soddisfano la λ -indipendenza.

4.2.1.2 Free will per modelli a variabili nascoste

Servendosi sempre del formalismo di A. Brandenburger e N. Yanofsky è ora naturale estendere per similitudine le considerazioni precedenti a modelli a variabili nascoste.

Definizione 4.6 (Free will per un modello a variabili nascoste). *Un modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) gode della proprietà di free will se per ogni test la probabilità della sua scelta non è condizionata dai test a lui precedenti.*

È importante sottolineare come l'analogia proposta non deve essere considerata un'analogia concettuale, bensì solamente una similitudine formale sulle richieste delle probabilità condizionate. In questo caso infatti la probabilità della scelta di un test è condizionata anche dal valore della variabile nascosta λ : che senso ha affermare che il free will che manifestano gli sperimentatori (che può di fatto essere valutato solo a livello empirico) è frutto di una media del free will che posseggono a livello di variabili nascoste? Per questo motivo si rimarca come la somiglianza sia solo a livello sintattico e non semantico.

Data tale definizione in maniera analoga a quanto fatto precedentemente per il livello empirico si può dimostrare che:

Free will e λ -causalità

Lemma 4.3 (Free will Vs λ -causalità). *Un modello a variabili nascoste che gode di free will è anche λ -causale.*

In maniera molto semplice è inoltre possibile mostrare che:

Free will e λ -indipendenza

Lemma 4.4 (Free will Vs λ -indipendenza). *Un modello a variabili nascoste che gode di free will gode anche della proprietà di λ -indipendenza.*

Dimostrazione. Dato un modello costituito da un test preparativo $\sigma \doteq \{\sigma_i\}_{i \in \eta}$ e da un test osservativo $\underline{a} \doteq \{(a_j)\}_{j \in \chi}$. Sfruttando la definizione di probabilità condizionata si ottiene facilmente che:

$$\Pr_\lambda[\lambda \mid \sigma, \underline{a}] = \frac{\Pr_\lambda[\lambda, \underline{a} \mid \sigma]}{\Pr_\lambda[\underline{a} \mid \sigma]} = \frac{\Pr_\lambda[\lambda \mid \sigma] \times \Pr_\lambda[\underline{a} \mid \sigma, \lambda]}{\Pr_\lambda[\underline{a} \mid \sigma]}$$

⁷ Eventuali estensioni possono essere fatte per induzione sfruttando il fatto che la composizione di un evento \mathcal{A} con uno stato $|\sigma\rangle$ è equivalente alla preparazione $|\rho\rangle \doteq |\underline{A} \circ \sigma\rangle$, e considerando il modello in cui il set delle possibili preparazioni è quello costituito da tutte le possibili composizioni tra i test e le preparazioni del modello di partenza.

Usando ora l'ipotesi di free will si ricava:

$$\Pr_\lambda[\lambda \mid \underline{\sigma}, \underline{a}] = \Pr_\lambda[\lambda \mid \underline{\sigma}]$$

cioè la λ -indipendenza. □

La richiesta di free will da parte dello sperimentatore è una richiesta che viene sempre considerata soddisfatta; aver mostrato che la λ -indipendenza discende dalla richiesta di free will data nella definizione 4.6, consente di giustificare l'approccio standard del problema delle variabili nascoste, ossia il considerare solamente i modelli che soddisfano la proprietà di λ -indipendenza (vedi figura 11).

È importante sottolineare che tutto ciò che è stato detto vale solamente nelle seguenti ipotesi:

- * limitatamente ad un modello, e quindi non per tutta la teoria operativa in esame,
- * vale il framework introdotto, pertanto si suppone che sia possibile introdurre delle probabilità a priori sulla scelta dei test.

L'ultimo punto, per quanto possa sembrare ragionevole, espone al rischio di poter etichettare tutto il ragionamento come speculazione metafisica, dato che, per il momento, non sembra esserci nessun modo di quantificare queste probabilità, o di falsificare l'assunzione di free will.

4.3 IL PARADOSSO DI KOCHEN-SPECKER

Per poter eseguire la dimostrazione di FWT è necessario un risultato inerente i cosiddetti *problemi di colorazione*, in stretta correlazione con un famoso teorema no-go della meccanica quantistica: il *teorema di Kochen-Specker*.⁸ Verrà di seguito presentata una versione semplificata dello stesso teorema, estirpato dal framework della meccanica quantistica. Verrà ora definito il soggetto di tale paradosso: una particolare classe di funzioni chiamate da J. H. Conway e S. Kochen *funzioni 101*.

Definizione 4.7 (Funzione 101 [13]). *Una qualunque funzione definita sulla sfera unitaria delle direzioni a valori in $\{0, 1\}^3$ è chiamata funzione 101 se ha la proprietà che assume il valore $(1, 0, 1)$ in un qualsiasi ordine, per una qualunque terna di direzioni fra loro ortogonali.*

Le funzioni 101

La definizione implica che, detta θ una funzione 101, essa soddisfa le due seguenti proprietà:

- A. $x \perp y \implies \theta(x) = 1 \vee \theta(y) = 1$ dove la scrittura $x \perp y$ significa che le direzioni x e y sono fra loro ortogonali. Questa conseguenza è ovvia, visto che in ogni terna ortogonale devono esserci due 1. In altre parole una funzione 101 su due direzioni fra loro perpendicolari non può valere zero per entrambe;
- B. $\theta(w) = \theta(-w) \quad \forall w$, dove, su di una sfera, $-w$ indica il punto antipodale a w . In pratica la funzione 101 è definita effettivamente sulle direzioni (a prescindere dai versi), pertanto la si può pensare definita sul piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$.

Quello che gli autori chiamano *paradosso di Kochen-Specker* pone serie limitazioni sull'esistenza delle funzioni 101; infatti vale il seguente lemma.

Lemma 4.5 (Paradosso di Kochen-Specker [13]). *Non esiste alcuna funzione 101 per le 33 coppie di direzioni della figura 12.*

Il paradosso di Kochen-Specker

⁸ Per qualche informazione sul teorema di Kochen-Specker si veda l'appendice B.

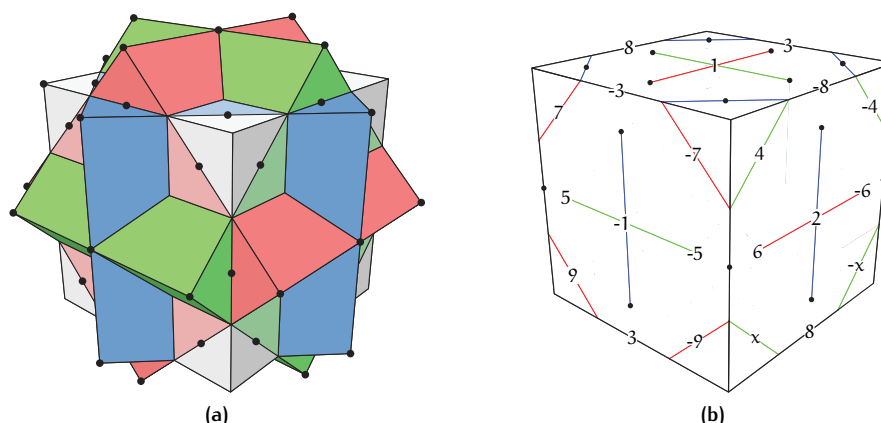


Figura 12.: I tre cubi colorati della figura 12a sono ottenuti ruotando il cubo bianco di 45° rispetto ai suoi assi coordinati. Le 33 direzioni sono gli assi di simmetria di ciascun cubo che passano attraverso i punti neri. La figura 12b mostra alcune regole su come identificare tali direzioni. Immagini tratte da [12].

Si usa l'espressione *coppia di direzioni* per sottolineare che le funzioni 101 sono definite sulla sfera unitaria quozientata dalla relazione di equivalenza che associa fra loro i punti antipodali. Per tutti i riferimenti sulla costruzione delle 33 direzioni ci si riferisca alla didascalia dell'immagine 12.

Dimostrazione. Si consideri come terna ortogonale di partenza quella identificata dai nodi $(2, -1, 1)$, e senza perdita di generalità i nodi 1 e -1 abbiano il valore *uno*, e il nodo 2 il valore *zero*. Tali assegnazioni forzano sulla terna ortogonale costituita dai nodi $(2, 3, -3)$ che anche 3 e -3 abbiano il valore *uno*. I nodi 4 e -x costituiscono una terna assieme a 3, pertanto uno di loro (supponiamo senza perdita di generalità che sia 4) deve valere *zero*. In virtù della riflessione che scambia -4 e x lasciando invariati 4 e -x è possibile supporre senza perdita di generalità che anche -4 sia *zero*.

Una rotazione di 90° attorno a 1 porta la terna $(7, 5, 9)$ in $(4, 6, x)$ e mostra così che 5 è ortogonale a 4, che $(1, 5, 6)$ è un'altra tripla ortogonale, e che 6 è ortogonale sia a 7 che a 9. Pertanto 5 deve valere *uno*, 6 *zero*, 7 e 9 *uno*. Un argomento simile lo si applica inalterato ai nodi -5, -6, -7, -9.

Concludendo, 8 forma una tripla con -7 e 9, e visto che si è trovato che -7 e 9 devono valere *uno*, si ricava che 8 vale *zero*. Grazie alla terna $(-8, 7, -9)$ si trova analogamente che anche -8 vale *zero*. Ma dal momento che -8 e 8 sono fra loro ortogonali non possono valere entrambi *zero*, contraddicendo in questo modo il punto A delle proprietà delle funzioni 101 elencate precedentemente. \square

Conseguenza del paradosso di Kochen-Specker

Urge un'osservazione importante: l'assioma SPIN assicura che il risultato della misura delle componenti quadrate dello spin lungo tre direzioni ortogonali dia come risultato 1, 0, 1 in un qualche ordine. Si potrebbe pensare che tale misurazione coincida con la lettura di valori predeterminati. Questo equivale ad affermare che per ogni stato a spin 1 esiste una funzione 101 i cui valori sono i possibili outcome dell'esperimento di misura congiunta dello spin quadrato. Dal paradosso di Kochen-Specker appena enunciato si conosce però che ciò non può essere possibile. Tale impossibilità si può dimostrare considerando le 33 direzioni della figura 12.⁹ Pertanto, contrariamente a quanto si potrebbe pensare,

⁹ Esistono altre costruzioni, con un numero di direzioni differente. L'argomento originale di S. Kochen e E. P. Specker se ne serve di 117 e necessità di uno spazio 3-dimensionale; un argomento successivo di A. Cabello *et al.* si serve invece di 18 direzioni e di uno spazio 4-dimensionale. Quest'ultimo però è un risultato

la misura dello spin lungo tre direzioni ortogonali non può essere considerata come la lettura di valori preesistenti.

4.4 LA CONSISTENZA INTERNA DEGLI ASSIOMI

Alla luce del risultato mostrato nella sezione precedente potrebbe sorgere la seguente domanda: gli assiomi SPIN, TWIN e MIN sono fra loro consistenti? Tale quesito nasce dalla seguente osservazione: l'assioma TWIN assicura che quando due sperimentatori eseguono la misura della componente quadrata dello spin lungo la stessa direzione su di uno stato di singoletto per particelle a spin 1 ottengono il medesimo risultato. D'altro canto in funzione di quanto precedentemente esposto il risultato di tale tipo di misura non può essere inteso come la lettura di valori preesistenti. Com'è possibile quindi che i due sperimentatori ottengano lo stesso risultato, se tale risultato viene di fatto generato al momento della misura? Forse tale aspetto paradossale è da imputare ad una inconsistenza di fondo tra gli assiomi fra loro? Gli autori J. H. Conway e S. Kochen trattano approfonditamente questa questione in [13] mostrando come invece sia possibile costruire un modello giocattolo (*l'universo esagonale*) che soddisfi tutti gli assiomi, e dimostrando quindi la consistenza interna degli stessi. Nella sezione successiva verrà illustrata tale interessante costruzione.

4.4.1 L'universo esagonale

Nell'universo esagonale lo spazio-tempo è costituito da una tassellazione esagonale del piano come illustrato in figura 13a. Gli sperimentatori possono occupare un esagono e allo scoccare di un nuovo giorno possono spostarsi in una delle caselle adiacenti come rappresentato in figura 14: tale scelta si suppone sia libera.

Ogni esagono è caratterizzato da una certa grandezza che può assumere il valore 0 o 1, e che può essere solamente determinata da un osservatore presente nell'esagono. Quest'ultima condizione assicura che lo sperimentatore non possa conoscere in anticipo il valore di un esagono temporalmente successivo all'esagono in cui attualmente si trova: tale richiesta, unita alla precedente inerente il free will dello sperimentatore, costituisce il parallelo dell'assioma MIN per il modello dell'universo esagonale. Un'ulteriore caratteristica di questo esempio è che la somma dei valori di tre esagoni disposti come in figura 14 deve sempre essere pari (pertanto 0 o 2). Quest'ultima richiesta è l'analogo degli assiomi SPIN e TWIN.¹⁰

Tutte queste condizioni, che sono l'equivalente degli assiomi di §4.1, sono compatibili fra loro? Per mostrare che la risposta alla domanda precedente è affermativa, si introdurrà ora un agente ad assicurare che tutte le richieste siano sempre soddisfatte senza

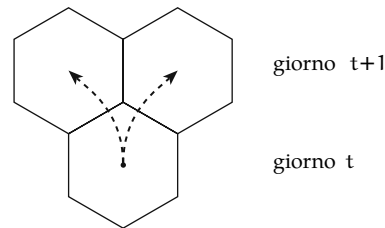


Figura 14.: Free will nell'universo esagonale. Immagine tratta da [13].

Le misure nell'universo esagonale

L'agente eterno

meno forte dell'argomento originale, dal momento che un argomento che implica la contraddizione in uno spazio n -dimensionale, la implica anche per uno spazio $(n + 1)$ -dimensionale. Quello che gli J. H. Conway e S. Kochen chiamano paradosso di Kochen-Specker è di fatto l'argomento proposto da A. Peres con 33 direzioni in dimensione 3.

¹⁰ È anche l'analogo di TWIN, poiché la richiesta che la somma assuma solo valori pari, implica che, a giorno fissato, sia presente una correlazione fra esagoni spazialmente separati.

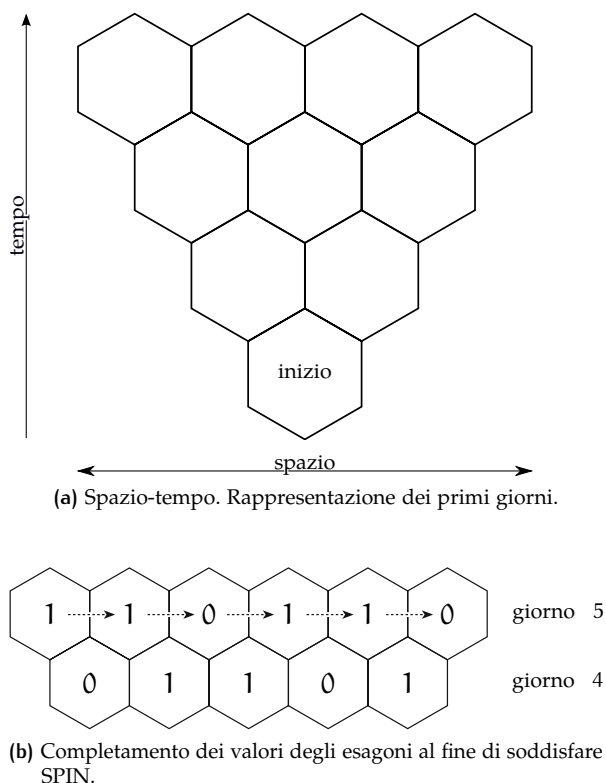


Figura 13.: Universo esagonale. Immagini tratte da [13].

contraddizioni.¹¹ Si supponga che due sperimentatori, i soliti Alice e Bob, partano dal primo giorno di figura 13a: i.e., l'esagono identificato dalla scritta *inizio*. Si supponga che essi non eseguano mai gli esperimenti allo stesso istante, e che il risultato del primo esperimento eseguito (chiunque l'abbia fatto) sia determinato dall'agente in maniera libera tra i possibili risultati (*zero* o *uno*). Effettua la scelta per un esagono l'agente esterno potrà completare i valori anche per tutti gli altri inerenti lo stesso giorno: i loro valori infatti saranno forzati ad assumere determinate quantità al fine di soddisfare l'assioma SPIN (vedi figura 13b).

*No-signaling nell'universo
esagonale*

Il fatto che, ad un dato giorno, l'agente decida l'outcome solamente nel momento in cui il primo esperimento viene eseguito, mostra che nemmeno lo sperimentatore può predire il risultato di un esperimento prima di quel giorno. È molto interessante notare che in questo modello la velocità di propagazione con cui l'agente completa gli esagoni non è limitata, contrariamente a quanto invece è previsto per gli sperimentatori. Il fatto che non valga MIN per l'agente, non vuol dire che non valga MIN per il modello: nel modello infatti non è consentito signaling: i.e., gli sperimentatori non possono sapere il risultato di un esperimento prima di eseguirlo. Questa considerazione è molto importante: il fatto che tutti gli elementi del modello rispettino una particolare proprietà, non implica che elementi esterni al modello, che vengono eventualmente usati per spiegarlo, debbano soddisfarla a loro volta.

Un'altra caratteristica peculiare di questo agente è la seguente: si supponga che Alice e Bob si mettano d'accordo anzitempo in modo che il secondo si muova sempre verso

¹¹ J. H. Conway e S. Kochen si riferiscono a questo agente con il nome di *Giano*, divinità bifronte del pantheon latino. Tale scelta è motivata dal fatto che l'azione dell'agente potrà essere descritta in due modi simmetrici fra loro, o come gli autori affermavano, *Giano* può agire con la sua faccia destra, o con la sua faccia sinistra.

destra, la prima verso sinistra e che entrambi eseguano la misurazione allo stesso istante (per un prefissato sistema di riferimento inerziale). L'agente allora potrà decidere di agire in due modi: decidere il risultato per lo sperimentatore che sta più a sinistra (Alice), e completare i risultati per gli altri esagoni fino ad arrivare al risultato per quello che sta a destra (Bob)(e.g., vedi figura 13b), oppure fare esattamente il contrario. In entrambi i casi non è possibile capire quale delle due tecniche l'agente ha adottato. Ciò è dovuto al fatto che il modello gode di una **simmetria destra-sinistra**, l'agente invece no: ogni volta egli agisce o verso destra o verso sinistra.

4.4.2 Modello con agente per gli assiomi SPIN, TWIN, MIN

Riferendosi all'esempio dell'universo esagonale, è possibile introdurre anche nel caso dell'esperimento con lo stato di singoletto di particelle a spin 1 un agente che illustra come i tre assiomi non siano inconsistenti fra loro. L'agente seleziona un sistema di riferimento inerziale preferenziale, e decide le risposte sempre e solo rispetto a questa scelta. Le risposte vengono decise a sua discrezione, a meno che non siano forzate dagli assiomi SPIN e TWIN. I risultati delle misure degli sperimentatori sono Lorentz-invarianti, nonostante l'azione dell'agente non lo sia affatto. È inoltre chiaro come sia impossibile per gli sperimentatori trasmettere informazione nel passato, o equivalentemente trasmettere informazione super-luminale: in altre parole MIN è soddisfatto per gli sperimentatori.

La prima critica di fronte a questo tipo di spiegazione è senz'altro la seguente:

Questo modello non può assolutamente essere una spiegazione poiché manifestamente non Lorentz-invariante, contrariamente agli effetti che vorrebbe spiegare.

Questa affermazione è senz'altro condivisibile, però bisogna prestare attenzione ad una questione: il fatto che esista un modello che riesca a spiegare gli assiomi (infatti tutta la costruzione con l'agente come si è detto è solo finalizzata a questo) implica che tali assiomi non sono contraddittori fra di loro. Senz'altro un modello del genere non è assolutamente consigliabile, dal momento che quando si cerca un modello in grado di descrivere determinati fenomeni si cerca di fare in modo che il modello presenti le stesse simmetrie presenti nei fenomeni che devono essere descritti.¹² Pertanto l'utilità del modello presentato non è senz'altro quella di pretendere di essere la descrizione di *come vadano veramente le cose*, bensì un semplice esempio che mostri come gli assiomi non portino a contraddizione.

Il principio di Curie

4.5 IL TEOREMA DEL FREE WILL

Si è ora giunti all'enunciazione del risultato di J. H. Conway e S. Kochen nella versione forte. [12]

Teorema 4.1. *Gli assiomi SPIN, TWIN e MIN implicano che la risposta di una particella di spin 1 nella misura dello spin lungo tre direzioni ortogonali, per qualunque sistema di riferimento inerziale non è funzione di qualcosa situato nel passato di tale risposta.*

Il teorema afferma sostanzialmente che, così come per gli sperimentatori non esiste una funzione dipendente dal loro passato (in un qualunque sistema di riferimento inerziale)

¹² Questa richiesta prende il nome di **principio di Curie**, da P. Curie:

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

(Curie, P. (1984) "Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique" - *J. Phys.* 3: 393).

in grado di definire la scelta dell'esperimento che eseguiranno, così non esiste un'analogia funzione che determini il risultato delle particelle sottoposte ad una misura congiunta dello spin lungo tre direzioni ortogonali.

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che esista un sistema di riferimento inerziale \mathcal{J} nel quale la risposta della particella a , in seguito alla misura congiunta delle componenti quadrate dello spin sulla terna ortogonale (x, y, z) da parte dello sperimentatore A , sia data da una funzione $\theta_a^{\mathcal{J}}(\alpha)$ dipendente da un set di parametri α , situati nel passato rispetto alla risposta di a . Analogamente si supponga che esista un sistema di riferimento inerziale \mathcal{G} nel quale la risposta della particella b , in seguito alla misura della componente quadrata dello spin lungo una direzione w da parte dello sperimentatore B , sia data da una funzione $\theta_b^{\mathcal{G}}(\beta)$, dove β è un set di parametri situati nel passato rispetto alla risposta b . Pertanto:

$$\theta_a^{\mathcal{J}}(\alpha) = \begin{cases} (1, 1, 0) \\ (1, 0, 1) \\ (0, 1, 1) \end{cases} \quad \theta_b^{\mathcal{G}}(\beta) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Da cosa sono costituite le informazioni α a cui la particella a fa riferimento al fine di determinare la propria risposta? Tutte le informazioni situate prima della risposta a sono rappresentate dalla scelta dello sperimentatore A di eseguire la misura sulla specifica terna (x, y, z) , e da tutte le informazioni antecedenti alla risposta a indipendenti dalla scelta dello sperimentatore (si chiamino quest'ultime α'); pertanto la funzione $\theta_a^{\mathcal{J}}(\alpha)$ può essere pensata come

$$\theta_a^{\mathcal{J}}(x, y, z; \alpha')$$

Una dipendenza di $\theta_a^{\mathcal{J}}$ dalla scelta della direzione w dello sperimentatore B è da escludere, dal momento che vale l'assioma MIN. Poiché si è detto che il set di eventi α' non dipende da (x, y, z) , si ha che per un'altra scelta (x', y', z') , differente dalla precedente, gli α' non cambiano e pertanto possono essere considerati come dei parametri fissati ad ogni esperimento (prima della scelta dello sperimentatore A); pertanto è possibile considerare $\theta_a^{\mathcal{J}}(\alpha)$ nel modo seguente:

$$\theta_a^{\mathcal{J}}(x, y, z)$$

e maniera analoga si conclude anche che per la particella b la funzione può essere riscritta

$$\theta_b^{\mathcal{G}}(w)$$

dove in entrambi i casi si è omessa lo specifico riferimento ad α' e β' , dal momento che sono considerati dei valori fissati per ogni esperimento.

Si supponga che lo sperimentatore B esegua la scelta della direzione w della propria misura limitatamente alle 33 direzioni riportate in figura 12a. Si supponga inoltre che A possa scegliere tra le 40 terne ortogonali ottenute completando le 33 direzioni del paradosso di Kochen-Specker. In questo modo esistono delle direzioni comuni fra le quali i due sperimentatori possono scegliere, e su di queste per l'assioma TWIN si ha che:

$$\theta_a^{\mathcal{J}}(x, y, z) = (\theta_b^{\mathcal{G}}(x), \theta_b^{\mathcal{G}}(y), \theta_b^{\mathcal{G}}(z))$$

SPIN assicura che $\theta_a^{\mathcal{J}}(x, y, z)$ possa assumere solo i valori $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, risultando pertanto una funzione 101. Il paradosso di Kochen-Specker proibisce l'esistenza di tale funzione sulle 33 direzioni di figura 12a, pertanto si è arrivati ad un assurdo e si è portati a rigettare l'ipotesi di dipendenza funzionale della risposta delle particelle dal loro passato. \square

Nota (Sulla difficoltà di estensione del FWT). La dimostrazione del teorema del free will si basa sostanzialmente sul risultato di S. Kochen e E. P. Specker. Parafrasare la dimostrazione di J. H. Conway e S. Kochen del FWT in un contesto operativo implica l'aver a disposizione un risultato analogo al paradosso di Kochen-Specker per un modello operativo.¹³ L'argomento di Kochen-Specker però si rifà a caratteristiche molto specifiche della meccanica quantistica, e un eventuale equivalente per un modello operativo dovrebbe cercare di essere il meno restrittivo possibile. Il problema è che risulta estremamente difficile riuscire a caratterizzare tale modello senza introdurre troppe richieste da non renderlo significativo, ovvero con vincoli troppo restrittivi da comprendere la sola meccanica quantistica: si pensi che la dimostrazione più semplice in dimensione quattro deve richiedere almeno 24 possibili direzioni, [33] che in una teoria operativa si traducono in almeno altrettanti effetti osservativi. Esistono in ogni caso due dimostrazioni puramente geometriche del teorema di Kochen-Specker che possono forse dare uno spunto ad una sua generalizzazione operativa. [17, 9]

Difficoltà d'estensione

4.6 IL CASO STOCASTICO E LE POSIZIONI CONTRARIE

Il FWT così formulato non sembra altro che affermare come una teoria a variabili nascoste non possa essere deterministica (ai sensi delle definizioni 3.9, 3.10). In realtà gli autori sostengono si sia in grado di affermare di più: anche le teorie a variabili nascoste stocastiche sarebbero escluse dal FWT. Per affermare ciò J. H. Conway e S. Kochen in [13] osservano come una teoria stocastica può sempre essere resa deterministica nel modo seguente: il fattore stocastico può essere reso come una lettura locale di una stringa precalcolata di bit random. In quest'ottica però vorrebbe dire che la risposta delle particelle dipende da una quantità (la stringa random) situata nel loro passato; ma questo è escluso dal FWT. È proprio su questa questione che si sono aperti innumerevoli dibattiti in letteratura sulla validità del teorema del Free Will.

Estensione del FWT al caso stocastico

Il teorema del free will a detta degli autori impedisce la costruzione di una qualsiasi teoria a variabili nascoste (stocastica o no) che sia Lorentz invariante. R. Tumulka non è però d'accordo con questa conclusione, dal momento che afferma come la *teoria rGRWf*, generalizzazione relativistica della teoria GRW di localizzazione spontanea discreta della funzione d'onda, sia per costruzione Lorentz invariante e stocastica. [35, 20] Non si vogliono qui riportare i dettagli della teoria rGRWf, dal momento che porterebbero a deviare dal discorso che si vuol fare. Per il discorso che seguirà basti sapere che è un'interpretazione della meccanica quantistica che prevede che a tempi discreti avvenga un fenomeno casuale di localizzazione della funzione d'onda. Questo processo viene descritto da un'equazione di Schrödinger modificata tramite l'aggiunta di un termine stocastico non-lineare, che su scala microscopica si riduce praticamente all'usuale equazione di Schrödinger, ma che su scala macroscopica provvede ad abbattere i termini di sovrapposizione di stati macroscopicamente differenti. Tra una localizzazione e un'altra (che nella teoria viene chiamata *flash*) l'evoluzione della funzione d'onda è l'evoluzione unitaria standard. Fin qui è sostanzialmente la teoria di localizzazione spontanea discreta di Ghirardi-Rimini-Weber; l'estensione di Tumulka garantisce la Lorentz invarianza della trattazione. Si noti che la distribuzione stocastica dei flash dipende da campi esterni: i.e., dal setting della misurazione dello sperimentatore.¹⁴

rGRWf

¹³ Si ribadisce che il teorema di Kochen-Specker e il paradosso di Kochen-Specker sono sostanzialmente la stessa cosa: il secondo però è epurato da qualunque riferimento ad elementi della meccanica quantistica.

¹⁴ Per dettagli su questa teoria si rimanda a Tumulka, R. (2006) "A Relativistic Version of the Ghirardi-Rimini-Weber Model", *Journal of Statistical Physics* 125(4):821-840.

Se l'interpretazione del FWT mette tutti d'accordo per il caso deterministico, cioè:

$$\text{modello deterministico} \wedge \text{SPIN} \wedge \text{TWIN} \wedge \text{MIN} \implies \perp$$

sono le considerazioni sui modelli stocastici che non sono state così ben accolte:

$$\text{modello stocastico} \wedge \text{SPIN} \wedge \text{TWIN} \wedge \text{MIN} \implies \perp$$

La considerazione che un modello a variabili nascoste non possa essere deterministico se vuol essere covariante e no-signaling è un risultato conosciuto. Alla luce del framework introdotto nel capitolo precedente la dimostrazione di tale considerazione è molto semplice, dal momento che un modello deterministico covariante e no-signaling, è necessariamente locale. Vale infatti il seguente lemma.

Covarianza e no-signaling per modelli a variabili nascoste

Lemma 4.6. *Un modello a variabili nascoste deterministico, covariante e che soddisfa il principio di no-signaling è anche locale.*

Dimostrazione. Ci siano i soliti Alice e Bob, i quali eseguano sulla propria parte di uno stato bipartito condiviso i test \underline{A} e \underline{B} rispettivamente. Si supponga che nel sistema di riferimento inerziale \mathcal{J}_A Alice esegua il test prima di Bob, e in \mathcal{J}_B il contrario; pertanto siano definiti i due seguenti modelli a variabili nascoste $(\Omega, \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_A})$, $(\Omega, \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_B})$ riferiti rispettivamente ad \mathcal{J}_A e \mathcal{J}_B . Poiché il modello a variabili nascoste deve essere covariante si ha che:

$$\text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_A}[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j \mid (\mathcal{J} \otimes \underline{B}) \circ (\underline{A} \otimes \mathcal{J}), \sigma, \lambda] = \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_B}[\mathcal{B}_j, \mathcal{A}_i \mid (\underline{A} \otimes \mathcal{J}) \circ (\mathcal{J} \otimes \underline{B}), \sigma, \lambda]$$

dove la notazione rende evidente quale test viene nei vari casi eseguito per primo.

Marginalizzando su Bob si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_A}[\mathcal{A}_i \mid (\mathcal{J} \otimes \underline{B}) \circ (\underline{A} \otimes \mathcal{J}), \sigma, \lambda] &= \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_A}[\mathcal{A}_i \mid (\underline{A} \otimes \mathcal{J}), \sigma, \lambda] = \\ &= \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_B}[\mathcal{A}_i \mid (\underline{A} \otimes \mathcal{J}) \circ (\mathcal{J} \otimes \underline{B}), \sigma, \lambda] \end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza è dovuta al fatto che vale il no-signaling a livello di variabili nascoste.¹⁵ L'equazione precedente mostra come $\text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_B}[\mathcal{A}_i \mid (\underline{A} \otimes \mathcal{J}) \circ (\mathcal{J} \otimes \underline{B}), \sigma, \lambda]$ non possa dipendere da \underline{B} . Marginalizzando su Alice si trova analogamente che:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_B}[\mathcal{B}_j \mid (\mathcal{J} \otimes \underline{B}) \circ (\underline{A} \otimes \mathcal{J}), \sigma, \lambda] &= \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_B}[\mathcal{B}_j \mid (\mathcal{J} \otimes \underline{B}), \sigma, \lambda] = \\ &= \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_A}[\mathcal{B}_j \mid (\mathcal{J} \otimes \underline{B}) \circ (\underline{A} \otimes \mathcal{J}), \sigma, \lambda] \end{aligned}$$

e che $\text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_A}[\mathcal{B}_j \mid (\mathcal{J} \otimes \underline{B}) \circ (\underline{A} \otimes \mathcal{J}), \sigma, \lambda] = \text{Pr}_\lambda^{\mathcal{J}_A}[\mathcal{B}_j \mid (\mathcal{J} \otimes \underline{B}), \sigma, \lambda]$. Pertanto sia in \mathcal{J}_A che in \mathcal{J}_B vale l'indipendenza dai parametri.

Visto che sia il determinismo forte che quello debole implicano l'indipendenza dagli outcome (lemmi 3.3 e 3.5), e che per il punto precedente la covarianza e il no-signaling implicano l'indipendenza dai parametri, si ha che l'unione di tutte le condizioni implica la località. \square

Come si sa se vale la λ -indipendenza (assunzione che viene tacitamente fatta da chiunque) esistono severe restrizioni sull'esistenza di un modello a variabili nascoste locale equivalente ad un modello operativo (teoremi 3.2 e 3.4), e in generale si sa grazie al teorema di Bell che non ne esiste alcuno equivalente alla meccanica quantistica.¹⁶

¹⁵ Il no-signaling a livello di variabili nascoste è la λ -causalità che è stata introdotta nel capitolo precedente. Nelle pagine che seguiranno si preferirà però mantenere questa terminologia più aderente a quella comunemente trovata in letteratura.

¹⁶ Le considerazioni fatte sono molto simili a quelle di A. Gisin in [19] in cui mostra che ogni modello a variabili nascoste (locali o non-locali) covariante e per cui vale il no-signaling può essere considerato locale. Qui si è però preferito riformulare il suo argomento alla luce delle definizioni e dei lemmi del capitolo 3.

		b	
		0	1
a	(0, 1, 1)	$\frac{1}{3} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})^2$	$\frac{1}{3} [1 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})^2]$
	(1, 0, 1)	$\frac{1}{3} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{y})^2$	$\frac{1}{3} [1 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{y})^2]$
	(1, 1, 0)	$\frac{1}{3} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})^2$	$\frac{1}{3} [1 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})^2]$

Tabella 6.: Probabilità congiunte previste dalla meccanica quantistica per l’esperimento delineato nel FWT. Il simbolo \cdot denota il prodotto scalare in \mathbb{R}^3 , e le lettere in grassetto i vettori delle corrispondenti direzioni. Tabella tratta da [20].

		b							
		0		1		0		1	
a	(0, 1, 1)	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
	(1, 0, 1)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
	(1, 1, 0)	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
		$w = x$		$w = y$		$w = z$		$w \neq x, y, z$	

Tabella 7.: Probabilità congiunte che soddisfano SPIN, TWIN e MIN. Tabella tratta da [20].

Pertanto nel caso deterministico effettivamente il FWT non dice nulla di nuovo. La questione è se il teorema del free will esclude anche teorie a variabili nascoste stocastiche covarianti e che godono di no-signaling. La diatriba è ancora molto viva, però grazie alle puntualizzazioni di A. Gisin in [18], e alcune considerazioni contenute in [29], è possibile trovare una soluzione a questa apparente incompatibilità.

Come visto precedentemente l’assioma MIN, che coincide con una richiesta di no-signaling e di covarianza per le probabilità, applicato ad un modello a variabili nascoste ne implica l’indipendenza dai parametri. Di modelli a variabili nascoste che soddisfano SPIN, TWIN, e MIN (nel senso di indipendenza dai parametri) è possibile trovarne facilmente di tipo stocastico. La meccanica quantistica può essere considerata una teoria a variabili nascoste dotata di single-valuedness, pertanto un possibile modello a variabili nascoste che gode di SPIN, TWIN e MIN è quello caratterizzato dalle probabilità congiunte riportate in tabella 6, che riporta esattamente le previsioni della meccanica quantistica per un esperimento come quello delineato nel teorema del free will. Non è però necessario che siano rispettate le previsioni della meccanica quantistica affinché valgano gli assiomi del FWT: infatti come detto inizialmente tali assiomi determinano solo alcune proprietà che deve presentare una misura di probabilità (e nello specifico quella della meccanica quantistica le rispetta): e.g., le probabilità di tabella 7 rispettano gli assiomi, però non rappresentano le previsioni della meccanica quantistica.

Come detto precedentemente J. H. Conway e S. Kochen prescrivono un modo per rendere deterministico un modello stocastico: codificare il risultato casuale in una stringa molto lunga precalcolata, e considerare l’evento random come una lettura da tale stringa. Tumulka *et al.* in [20] mostrano però che tale approccio non mantiene più la richiesta di no-signaling a livello di modello di variabili nascoste, o, per dirla come J. H. Conway e S. Kochen, viene violato l’assioma MIN, dal momento che è necessario che esista una comunicazione super-luminale inerente la scelta degli sperimentatori. Basta considerare la ricetta degli autori del FWT: si supponga che un processo sia stocastico, e che la stocasticità dipenda dal setting degli esperimenti dei due sperimentatori. Allora secondo J. H. Conway e S. Kochen basta pregenerare le 1320 (= 40 × 33) possibili stringhe random, una per ogni possibile setting dell’esperimento indicato nel FWT. La stocasticità del

rGRWf e signaling

modello originale è recuperata tramite la lettura di queste stringhe pregenerate, rendendo così il nuovo modello deterministico. Inoltre poiché le sequenze random sono precalcolate si può pensare che esse siano state date nel passato rispetto all'operazione di misura. Il FWT però esclude che la risposta delle particelle sia vincolato deterministicamente dal loro passato. Pertanto, secondo J. H. Conway e S. Kochen, il modello di partenza (quello stocastico) non è valido.

Tumulka *et al.* fanno però notare come le particelle per poter decidere quale delle stringhe devono leggere devono effettivamente sapere quale scelta è stata fatta dai due sperimentatori, il che, essendo Alice e Bob separati *space-like*, implica che ci sia una comunicazione super-luminale sulla scelta del setting, scontrandosi proprio con MIN. J. H. Conway ribatte affermando che MIN richiede che sia soddisfatta l'indipendenza dell'outcome a di A dalla scelta di B, e non soltanto la distribuzione di probabilità di a . Come tale affermazione possa essere contestualizzata in un framework probabilistico è dubbio, ma mette in luce dove stia l'incomprensione.

Le considerazioni di A. Gisin in [18], che culminano con la frase:

Tumulka and co-authors correctly insist that rGRWf is as covariant as possible, and the FWT correctly stresses that it is not more covariant than possible...

mettono in luce che il problema consiste nella confusione tra le proprietà di un modello a variabili nascoste e quelle del modello empirico a cui il modello a variabili nascoste vuole essere equivalente. L'assioma di MIN formulato nel FWT richiede un principio di no-signaling che valga sia per il modello empirico che per il modello a variabili nascoste. Che J. H. Conway e S. Kochen intendano questa cosa la si evince dalla seguente frase, dove vogliono sottolineare in che modo viene usato MIN nella dimostrazione:

[...] the argument actually allows any information that does not reveal A's choice to be transmitted super-luminally, or even backwards in time.

Pertanto secondo gli autori del FWT ciò che è proibito è una qualunque forma di comunicazione super-luminale che riveli le scelte degli sperimentatori, e tale comunicazione non è da riferirsi al solo modello empirico, bensì anche a livello delle variabili nascoste, che nella loro dimostrazione sono incorporate nelle informazioni passate α, β delle due particelle a, b . Il principio di no-signaling richiesto da J. H. Conway e S. Kochen è pertanto duplice: uno per il modello empirico, e uno per il modello a variabili nascoste. Quest'ultimo nel caso di uno stato bipartito può essere visto come la proprietà di indipendenza dai parametri per il modello a variabili nascoste: in §4.6 si è infatti mostrato come l'assioma MIN implichi che per un esperimento bipartito valga tale conclusione.

D'altro canto uno perché dovrebbe richiedere un principio di no-signaling a livello di variabili nascoste? Senz'altro la richiesta di no-signaling a livello di modello empirico (ovvero a livello di meccanica quantistica) è imprescindibile; a livello di variabili nascoste è senz'altro ragionevole, ma non necessaria: dal primo infatti non è possibile inferire necessariamente il secondo. Infatti dato un modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) , esso gode della proprietà di no-signaling a livello empirico se si ha che

$$\Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \underline{B}, \sigma] = \Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \underline{B}', \sigma]$$

Da questo però non è possibile inferire che gode anche di no-signaling a livello dei λ (che per uno stato bipartito implica l'indipendenza dai parametri), nemmeno se si ipotizza che valga la λ -indipendenza; infatti dall'uguaglianza precedente si ricava che

$$\sum_\lambda \Pr_\lambda[\lambda | \sigma] \times \{\Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \underline{B}, \sigma, \lambda] - \Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \underline{B}', \sigma, \lambda]\} = 0$$

ma per poter concludere che $\Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \underline{B}, \sigma, \lambda] = \Pr_\lambda[A_i | \underline{A}, \underline{B}', \sigma, \lambda]$ si dovrebbe sapere che la somma precedente è una somma a termini positivi (o negativi).

La covarianza a cui si riferisce A. Gisin nella citazione precedente si potrebbe più opportunamente definire *indipendenza dell'ordinamento temporale per la relazione causale*: un evento può essere considerato la causa di un secondo solo se il primo precede il secondo in tutti i sistemi di riferimento inerziali, il che implica che, se si ammette un principio di no-signaling, un evento è causa di un altro se il primo appartiene al cono luce passato del secondo. In quest'ottica la rGRWf è covariante quanto basta: è covariante (leggi no-signaling) fino al livello di descrizione empirico. Non lo è però fino del tutto: è infatti signaling a livello di descrizione dei flash, cioè a livello delle variabili nascoste. Cosa implica rinunciare ad un principio di no-signaling a livello di variabili nascoste? Senz'altro porta a dover abbandonare un robusto concetto di causalità: un criterio di causalità applicabile a tutti i livelli di descrizione.

Il teorema del free will potrebbe pertanto essere riassunto sinteticamente nel modo seguente:

La base logica del FWT

$$\text{TWIN} \wedge \text{SPIN} \wedge \text{Free will degli sperimentatori} \wedge \\ \wedge \text{Ipotesi funzionale} \wedge \text{Causalità a tutti i livelli} \implies \perp$$

SPIN e TWIN non possono essere rigettati perché sperimentalmente verificati. D'altro canto seppure un principio di causalità valido a tutti i livelli di descrizione e un'ipotesi di free will per gli sperimentatori non sia dimostrabile, bensì solamente assumibile, è altresì vero che la venerazione quasi totemica di tali concetti sia in parte giustificata dalla scienza e in particolare dal metodo scientifico. L'argomento di R. Tumulka è in linea di principio corretto, ma rifiuta un principio di causalità robusto; pertanto non appare affatto strano che J. H. Conway e S. Kochen siano portati a rifiutare un modello come quello della rGRWf. Tale rifiuto però non è dovuto al fatto che il FWT esclude la rGRWf. Come si è cercato di mostrare la rGRWf non soddisfa le ipotesi di applicabilità del teorema del free will, e pertanto l'argomento di J. H. Conway e S. Kochen non può dire nulla al riguardo. Il rifiuto è dovuto alla fiducia cieca che un principio di no-signaling debba valere a tutti i livelli descrittivi.

4.7 "WHAT DOES THE FWT ACTUALLY PROVE?"

Il titolo della sezione è un esplicito riferimento all'articolo [20] di S. Goldstein, D. V. Tausk, R. Tumulka, N. Zanghì citato più di una volta nella sezione precedente. Alla luce di quanto è stato detto in questo capitolo è possibile o no considerare il teorema del free will un risultato nuovo?

Per rispondere a tale domanda verrà ora introdotta un'altra definizione inerente il formalismo di A. Brandenburger e N. Yanofsky: il concetto di non-contestualità per un modello empirico.

*Non-contestualità secondo
A. Brandenburger e
N. Yanofsky*

Definizione 4.8 (Non-contestualità [7]). *Un modello empirico (Ψ, Pr) gode della proprietà di non-contestualità se e solo se per ogni $\sigma, \mathcal{A}_i, \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{B}'}, \underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{C}'}, \dots$ ammissibili si ha che:*

$$\text{Pr}[\mathcal{A}_i \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \sigma] = \text{Pr}[\mathcal{A}_i \mid \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}'}, \underline{\mathcal{C}'}, \dots, \sigma]$$

e analogamente per $\mathcal{B}_j, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{A}'}, \underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{C}'}, \dots$; e così via.

È possibile trovare una condizione sufficiente affinché un modello a variabili nascoste sia empiricamente non-contestuale.¹⁷

¹⁷ La parola *empirico* in riferimento ad una proprietà di un modello a variabili nascoste, come dovrebbe esser chiaro, indica che tale proprietà è da considerarsi previa marginalizzazione sui λ .

Lemma 4.7 ([7]). *Se un modello a variabili nascoste (Ω, \Pr_λ) soddisfa le proprietà di λ -indipendenza e di indipendenza dai parametri allora tutti i modelli empirici equivalenti Ψ, \Pr godono della proprietà di non-contestualità.*

Dimostrazione. Sia dato un modello a variabili nascoste in cui i test $\sigma, \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots$, e l'outcome \mathcal{A}_i siano ammissibili. Allora:

$$\begin{aligned} \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \sigma] &= \sum_\lambda \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \sigma, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \sigma] = \\ &= \sum_\lambda \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \sigma, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \sigma] = \\ &= \sum_\lambda \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}, \sigma, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \sigma] \end{aligned}$$

dove il passaggio dalla prima alla seconda riga è garantito dalla λ -indipendenza, e dalla seconda alla terza dall'indipendenza dai parametri. Analogamente per altri test $\underline{\mathcal{B}}', \underline{\mathcal{C}}', \dots$, ammissibili per il modello si può mostrare che:

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}', \underline{\mathcal{C}}', \dots, \sigma] = \sum_\lambda \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}', \sigma, \lambda] \times \Pr_\lambda[\lambda | \sigma]$$

Pertanto:

$$\Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{C}}, \dots, \sigma] = \Pr_\lambda[\mathcal{A}_i | \underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}', \underline{\mathcal{C}}', \dots, \sigma]$$

□

*Teorema di Kochen-Specker
secondo A. Brandenburger e
N. Yanofsky*

Dal momento che il teorema di Kochen-Specker pone vincoli sull'esistenza di un modello a variabili nascoste non-contestuale equivalente alla meccanica quantistica, esso può essere riformulato nel framework di A. Brandenburger e N. Yanofsky nel modo seguente:

Teorema 4.2 (Kochen-Specker [7]). *Esiste un modello empirico (Ψ, \Pr) per il quale non esistono modelli a variabili nascoste equivalenti che soddisfano la λ -indipendenza e l'indipendenza dai parametri.*

La dimostrazione, riportata in [7], mostra come sia possibile costruire tale modello empirico, e lo fa basandosi sul risultato di A. Cabello citato nella nota 9 a pagina 86. Si noti che la misura di probabilità costruita nella loro dimostrazione è proprio la misura di probabilità della meccanica quantistica. Pertanto il loro può essere effettivamente considerato un risultato inerente la meccanica quantistica.

Gli assiomi su cui si basa il teorema del free will possono essere parafrasati nei seguenti:

- A. covarianza e principio di no-signaling fino a livello di variabili nascoste (MIN);
- B. free will dello sperimentatore (MIN).
- C. vale la meccanica quantistica (SPIN + TWIN);

*Il teorema del free will nel
linguaggio di
A. Brandenburger e
N. Yanofsky*

Il punto **A** implica l'indipendenza dei parametri per il risultato del lemma 4.6; alla luce delle considerazioni di §4.2.1.2 il punto **B** implica invece la validità della proprietà di λ -indipendenza. I primi due punti limitano quindi l'interesse verso i soli modelli a variabili nascoste raffigurati in figura 15, cioè ai soli modelli che godono di λ -indipendenza e indipendenza dai parametri. Visto che per ipotesi è valido il punto **C** allora si può applicare il teorema di Kochen-Specker nella forma di teorema 4.2, il quale nega l'equivalenza di un qualunque modello a variabili nascoste con la meccanica quantistica.

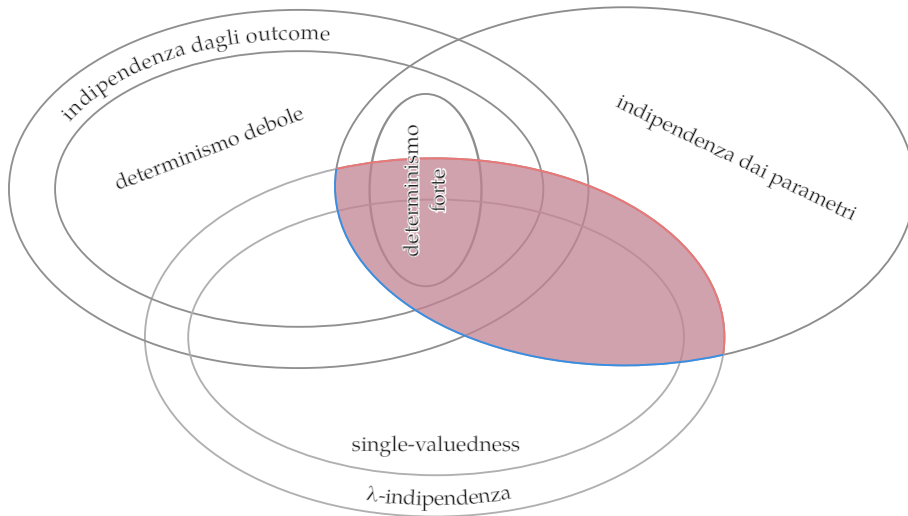


Figura 15.: La parte colorata identifica l'insieme di tutti i modelli a variabili nascoste equivalenti alla meccanica quantistica che non vengono esclusi dagli assiomi del teorema del free will

Pertanto il teorema del free will non dice effettivamente nulla di nuovo: non solamente in relazione ai modelli a variabili nascoste deterministici (come R. Tumulka ed altri affermano), bensì anche in relazione a modelli a variabili nascoste stocastici. È importante però prestare attenzione che le ipotesi del teorema di J. H. Conway e S. Kochen implicano l'interesse verso i soli modelli a variabili nascoste no-signaling e covarianti: all'interno di queste ipotesi segnano effettivamente la fine del programma dell'interpretazione della meccanica quantistica tramite modelli a variabili nascoste.

5

CONCLUSIONI

LA meccanica quantistica ha messo seriamente in discussione le credenze più consolidate del pensiero scientifico moderno, e in particolar modo ha messo in dubbio alcuni dei principi fondanti della scienza stessa. Onde superare tali problemi si è pensato di reinterpretare la meccanica quantistica dalle fondamenta; una possibile soluzione è data dall'*interpretazione a variabili nascoste*. Tale programma è stato però fortemente ridimensionato grazie ad alcuni dei teoremi no-go più famosi della fisica.

La necessità di una rifondazione della meccanica quantistica ha mostrato la possibilità di ricavare il formalismo matematico quantistico da assunzioni puramente operazionali e informazionali, inquadrando la meccanica quantistica nel contenitore più ampio delle cosiddette *teorie operazionali*. Dal momento che per tali teorie non esistono risultati analoghi ai più blasonati teoremi no-go quantistici, e in vista di un eventuale successivo sviluppo del formalismo operativo, si è cercato di mostrare qualche risultato analogo ai teoremi di Bell e EPR. Le finalità sono però inverse da quelle degli argomenti originari: si vuole scoprire quali sono le proprietà delle teorie operazionali in grado di inficiare una visione deterministica, locale o addirittura realista per tali modelli.

Per raggiungere il fine proposto è stato necessario introdurre preliminarmente il formalismo operativo (capitolo 2) e trattare approfonditamente un framework di lavoro per le teorie a variabili nascoste (capitolo 3). Riguardo quest'ultime sono stati illustrati alcuni risultati presenti in letteratura, e si è cercato di mostrare come alcuni di questi non siano utili per i fini proposti. In §3.3.1 è stata pertanto proposta una generalizzazione dell'*argomento EPR* dovuto a A. Brandenburger e N. Yanofsky in [7]. Analizzando ciò, si è mostrato che sotto le ipotesi del lemma 3.10, e in particolare l'*ipotesi di steering*, una teoria operativa non può essere considerata completa e soddisfacente l'indipendenza dagli outcome.

In seguito alle osservazioni fatte in §3.3.2 si è cercato di mostrare come il parallelo del teorema di Bell proposto sempre da A. Brandenburger e N. Yanofsky in [7] non sia significativo per il programma che ci si è proposti. Dopo aver pertanto illustrato un risultato di Hardy-Cabello riportato in [8, 27], si è provato ad applicarlo ad una teoria operativa per verificare quando essa riesce a soddisfare le ipotesi di tale teorema. Preliminarmente è stato però illustrato il medesimo argomento per sistemi non multipartiti, mostrando un'apparente contraddizione: una teoria operativa classica non ammetterebbe un'interpretazione localmente realista. Tale analisi ha permesso di porre luce su due aspetti, uno dei quali ha permesso di risolvere il problema:

- A. la commutazione a livello operativo non implica la commutazione a livello di variabili nascoste. Usualmente, però, nel caso multipartito questa viene sempre assunta. Tale assunzione è però giustificata dall'ulteriore assunzione di no-signaling e covarianza per la teoria a variabili nascoste;
- B. l'utilizzo di stati misti nell'argomento di Hardy-Cabello non è significativa, per lo meno nel caso a sistema singolo.

L'analisi successiva è stata rivolta agli usuali sistemi bipartiti. Il problema però si è rivelato più complicato del previsto a livello computazionale, costringendo la ricerca di sole soluzioni particolari. È stata illustrata una di questa, ma sfortunatamente è super-quantistica: non riesce infatti ad includere al suo interno la meccanica quantistica. Tale

Il problema dell'interpretazione della meccanica quantistica

Le teorie operazionali

Scopo della tesi

EPR debole per teorie operazionali

Hardy-Cabello per sistema singolo

Hardy-Cabello per sistema bipartito

punto pertanto è ancora aperto, sperando che in futuro tramite del *reverse-engineering* della dimostrazione originale di L. Hardy, si riescano a trovare condizioni significative per teorie operazionali che non escludano l'usuale meccanica quantistica.

Nell'ultimo capitolo si è esposto un argomento specificatamente quantistico, ovvero il teorema del free will. Originariamente il lavoro di tesi era iniziato da questa domanda: è possibile scrivere un analogo operativo del teorema di J. H. Conway e S. Kochen? La difficoltà ad estendere il teorema di Kochen-Specker – richiesto nella dimostrazione originaria – al caso operativo ha però impedito questo proposito.

L'ipotesi di free will

Nonostante ciò l'analisi del teorema del free will ha permesso di fare due considerazioni importanti. Da un lato è stato mostrato che una formulazione del principio di free will per teorie operazionali¹ compatibile con la versione standard, permette di derivare il principio di no-signaling dal futuro. Tale risultato però non deve stupire: la possibilità di poter fare scelte libere è senz'altro legata all'assenza di retrocausalità!

Variabili nascoste, covarianza e no-signaling

Dall'altro lato si è cercato di porre luce su una questione importante inerente l'approccio al problema dell'interpretazione a variabili nascoste, riscontrabile in letteratura nella diatriba presente tra J. H. Conway e S. Kochen da un lato e R. Tumulka dall'altro. È possibile costruire un modello a variabili nascoste equivalente alla meccanica quantistica che sia anche covariante e che goda esso stesso di no-signaling? Il teorema del free will lo impedisce. Pertanto le uniche estensioni quantistiche a variabili nascoste dovranno in qualche modo essere signaling a livello dei λ , o presentare un fenomeno di causalità non robusto. Il programma a variabili nascoste può essere considerato chiuso per la meccanica quantistica? La risposta è *dipende*. Il tutto è condizionato alla pretesa o meno che il principio di no-signaling e la covarianza debbano valere anche al livello dei λ . Nel caso si faccia questa richiesta allora hanno ragione gli autori del FWT: il programma a variabili nascoste è terminato. D'altro canto per il momento non si ha alcuna evidenza sperimentale di variabili nascoste, pertanto si ritiene che sia troppo restrittivo escludere a priori qualsiasi possibilità, per quanto questa possa essere fastidiosa.

FWT nel formalismo di A. Brandenburger e N. Yanofsky

Il lavoro è stato concluso con la dimostrazione del teorema del free will sfruttando le potenzialità del formalismo introdotto nel capitolo 3, una formulazione dovuta a A. Brandenburger e N. Yanofsky del teorema di Kochen-Specker specifica per la meccanica quantistica, e le considerazioni fatte sul legame tra l'ipotesi di free will e la proprietà di λ -indipendenza per un modello a variabili nascoste.

¹ In particolare è stata mostrata una formalizzazione per il framework di A. Brandenburger e N. Yanofsky introdotto nel capitolo precedente 3.

APPENDICE

A

POLITOPPI E POLITOPPI CONVESSI

UN politopo è un oggetto geometrico dalle facce piane che esiste in un numero arbitrario di dimensioni. Un poligono è un politopo in due dimensioni, un poliedro in tre, e così via. Per riferirsi alla generalizzazione n -dimensionale viene utilizzato il termine n -politopo. Il termine politopo è molto vasto e copre un'ampia classe di oggetti, con differenti definizioni. Alcune di queste non sono fra loro equivalenti, con il risultato che quello che due autori chiamano politopo in realtà non sono la stessa cosa.

Gli elementi di un politopo sono i vertici, gli spigoli, le facce, le celle e così via. Anche in questo caso la terminologia non è consistente tra i vari autori: ad esempio alcuni autori con il termine faccia si riferiscono ad un elemento $(n - 1)$ -dimensionale, altri invece si riferiscono specificatamente ad un oggetto bidimensionale.

In generale in queste pagine viene utilizzata la seguente terminologia. Un politopo n -dimensionale è delimitato da un certo numero di *facce* $(n - 1)$ -dimensionali. Quest'ultime sono a loro volta dei politopi le cui facce sono le *sottofacce* $(n - 2)$ -dimensionali del politopo originario. Le sottofacce sono a loro volta dei politopi le cui facce sono oggetti $(n - 3)$ -dimensionali del politopo di partenza, e così via. A questi sub-politopi ci si riferisce con l'espressione facce j -dimensionali, o j -facce *tout court*. Un 0-faccia è chiamata vertice, ed è costituita da un singolo punto, una 1-faccia è invece uno *spigolo*, ed è costituito da un segmento rettilineo. Una faccia 2-dimensionale è un poligono, una 3-dimensionale è un poliedro (o più raramente chiamata cella).

Le componenti di un politopo

POLITOPPI CONVESSI

Un *politopo convesso* è un politopo con la proprietà addizionale di essere un set convesso di punti in uno spazio n -dimensionale \mathbb{R}^n . Anche in questo caso in letteratura non esistono versioni univoche sulla terminologia: e.g., alcuni autori utilizzano equivalentemente le espressioni politopo convesso e poliedro convesso, altri preferiscono distinguerli; inoltre alcuni impongono che i politopi siano limitati, altri ammettono l'esistenza di politopi non limitati. Esistono due differenti definizioni formali del concetto di politopo convesso: la caratterizzazione tramite i vertici (V-rappresentazione), o tramite l'intersezione di semispazi (H-rappresentazione).

V-rappresentazione di un politopo convesso

Un set $K \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se, per ogni coppia distinta di punti $a, b \in K$, il segmento di estremi a e b è contenuto in K . Un politopo convesso è un set convesso compatto in cui l'insieme dei suoi punti estremi è finito. Un *punto estremo* di un set convesso K in uno spazio lineare reale è un punto di S che non appartiene a nessun segmento *aperto* di retta che unisce due punti di S . Tale definizione è equivalente a definire un politopo convesso come l'*inviluppo convesso* di un set finito di punti. Esistono infinite V-rappresentazioni per un politopo convesso, ma per uno di dimensione massima (n -politopo in \mathbb{R}^n) la V-rappresentazione minimale è unica, ed è costituita da tutti e soli i vertici del politopo.

Il politopo come inviluppo convesso

B

IL TEOREMA DI KOCHEN-SPECKER

Così chiamato in virtù degli autori S. Kochen e E. P. Specker, il teorema di Kochen-Specker è un importante quanto sottile risultato della meccanica quantistica. Il teorema cerca di dare dei vincoli sulla possibilità che un modello a variabili nascoste sia non-contestuale. Una teoria fisica che soddisfa la non-contestualità ha la caratteristica che le grandezze inerenti ad una determinata proprietà di un sistema sono indipendenti dal modo in cui questa grandezza viene misurata: i.e., indipendenti dal contesto della misura, o in altre parole, nel caso della meccanica quantistica, indipendentemente dal fatto che tale misura venga effettuata assieme ad un'altra osservabile con lei commutante.

Esistono molte dimostrazioni differenti per tale teorema, tutte molto complicate. Ci sono però due argomenti molto interessanti che si crede possano essere utili per un eventuale sviluppo futuro finalizzato alla dimostrazione di un analogo operativo del teorema di Kochen-Specker:

- A. la dimostrazione di A. Cabello riportata in [9], la quale ha il vantaggio di essere la meno stringente a livello di richieste sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} necessario per la dimostrazione. In particolare, portando la dimensione di \mathcal{H} a due, rende necessario l'utilizzo di POVM rispetto a misure proiettive. Sono proprio le misure generalizzate a costituire il parallelo quantistico del concetto operativo di osservazione;
- B. la dimostrazione geometrica riportata in [17] di un problema di colorazione intimamente connesso con la dimostrazione del teorema di Kochen-Specker. Dal momento che fa intervenire solamente relazioni geometriche, si pensa che forse possa essere utilizzata come spunto per la ricerca di un'estensione operativa.

Prima di proseguire con tali argomenti si consideri preliminarmente la formulazione originale del teorema:

Teorema B.1 (Kochen-Specker [25]). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert di dimensione maggiore o tutt'al più uguale a 3. Esiste un set M di osservabili su \mathcal{H} per il quale le seguenti due affermazioni sono contraddittorie:*

L'enunciato del teorema di Kochen-Specker

- A. *tutti gli elementi di M hanno simultaneamente valore; i.e., sono cioè mappati senza ambiguità sui numeri reali (il valore di $A \in M$ verrà designato con $v(A)$);*
- B. *se tre osservabili A, B, C sono compatibili, i loro valori $v(A), v(B)$ e $v(C)$ soddisfano le seguenti restrizioni:*
 - a) $C = A + B \implies v(C) = v(A) + v(B)$;
 - b) $C = A \cdot B \implies v(C) = v(A) \cdot v(B)$.

La richiesta A dell'enunciato del teorema di Kochen-Specker è direttamente collegata con la possibilità dell'esistenza di un modello a variabili nascoste equivalente alla meccanica quantistica. Esso infatti prescrive che tutti le osservabili esistano contemporaneamente a livello dei λ : viene cioè richiesta che la non-commutatività delle osservabili di M possa essere recuperata da una loro compatibilità a livello di variabili nascoste. Pertanto la prima ipotesi implica l'esistenza di un modello a variabili nascoste.

La seconda ipotesi invece è più criptica: le due assunzioni di cui è composta prendono rispettivamente il nome di *regola della somma* e *regola del prodotto*. Tali regole sono diretta conseguenza di un principio più generale detto *principio di composizione funzionale*, il quale a sua volta è conseguenza di un'assunzione di non-contestualità. E' per tale motivo che viene affermato che il teorema di Kochen-Specker con il suo risultato mina le possibilità di esistenza di un modello a variabili nascoste non-contestuale: è la seconda ipotesi che è in relazione con tale concetto. Visto che il collegamento è tutt'altro che banale lo si cercherà ora di mostrare. Il principio di composizione funzionale parte dal risultato matematico che implica che dati un operatore autoaggiunto A su di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e una funzione f da \mathbb{R} in \mathbb{R} è sempre possibile definire l'operatore $f(A)$ anch'esso autoaggiunto, tramite la seguente definizione

$$f(A) \doteq \sum_i f(a_i) P_i$$

dove a_i è l'autovalore di A inerente l'autospazio identificato dal proiettore P_i . Alla luce della considerazione precedente il principio di composizione funzionale prende la forma seguente:

Principio di composizione funzionale

Definizione B.1 (Principio di composizione funzionale [25]). *Dati un operatore autoaggiunto A associato all'osservabile A e una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e uno stato arbitrario Ψ , all'operatore autoaggiunto $f(A)$ è possibile associare univocamente l'osservabile $f(A)$ in modo tale che per lo stato Ψ valga la seguente uguaglianza:*

$$\nu(f(A)) = f(\nu(A))$$

Si verifica immediatamente che le regole di somma e prodotto sono conseguenza diretta della definizione precedente. [25]

Il principio precedente non è derivabile dal formalismo della meccanica quantistica; lo è però una sua versione statistica: [25]

Principio di composizione funzionale statistica

Definizione B.2 (Principio di composizione funzionale statistica [25]). *Dati A , f , Ψ come nella definizione B.1, per un numero reale arbitrario b si ha che:*

$$\Pr[\nu(f(A)) = b] = \Pr[f(\nu(A)) = b]$$

Questo secondo principio, oltre ad essere derivabile dal formalismo quantistico segue direttamente dalla definizione B.1. Infatti la definizione B.1 deriva dalle seguenti quattro ipotesi:

- A. definizione B.2;
- B. *realismo dei valori*: se esiste un numero reale α associato ad un operatore autoaggiunto A , e se per un certo stato il formalismo della meccanica quantistica prevede che $\Pr[\nu(A) = \alpha] = \beta$, allora esiste un'osservabile A con valore α ;
- C. tutte le osservabili della meccanica quantistica hanno sempre dei *valori definiti*;
- D. *non-contestualità*.

Il secondo punto in particolare merita un commento: esso sostanzialmente afferma che se un sistema è dotato di una certa proprietà Γ alla quale siamo in grado di associare un valore α , autovalore di un operatore autoaggiunto A , allora A rappresenta un'osservabile A e il suo valore α è una proprietà reale del sistema.

Come detto dalle quattro ipotesi precedenti è possibile derivare il principio di composizione funzionale. Si consideri uno stato arbitrario per un sistema e un'osservabile Q . Per

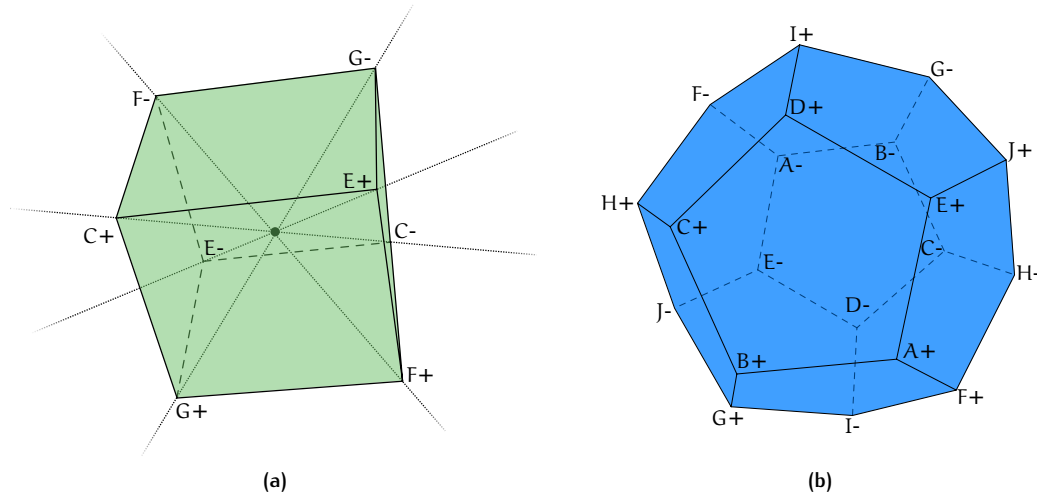


Figura 17.: La figura 17a mostra uno dei cubi utilizzati nella costruzione di A. Cabello; l'immagine 17b il dodecaedro utilizzato come ausilio per la definizione delle cinque POVM.

\mathcal{C} Q possiede un valore $\nu(Q) = a$. Tramite un'arbitraria funzione reale f di variabile reale è possibile costruire la quantità $f(\nu(Q)) = b$. Per questo numero grazie a \mathcal{A} si ha che:

$$\Pr[f(\nu(Q)) = b] = \Pr[\nu(f(Q)) = b]$$

In questo modo si è creato un nuovo operatore $f(Q)$, e grazie a \mathcal{B} si sa che è possibile associarvi un'osservabile $f(Q)$ dal valore b . Pertanto $\nu(f(\mathcal{A})) = f(\nu(\mathcal{A}))$. Dall'ipotesi di non-contestualità si sa che tale osservabile è unica. La dimostrazione del teorema di Kochen-Specker consiste nel trovare una configurazione di osservabili in grado di contraddire la congiunzione logica delle affermazioni del teorema. Il tutto si può tradurre in un problema di colorazione. Di seguito verranno mostrate le due dimostrazioni citate precedentemente.

B.1 DIMOSTRAZIONE DI A. CABELLO

La pietra angolare che permette di formulare una dimostrazione del teorema di Kochen-Specker anche in dimensione due, è l'utilizzo di misure generalizzate (POVM) anziché semplici misure proiettive. L'importanza di tale argomento non è solo dovuto alla capacità di ridurre il numero di dimensioni necessarie: nonostante la dimostrazione faccia esplicito riferimento ad elementi della meccanica quantistica essa riesce ad individuare un interessante visione geometrica del problema, che può suggerire alcuni ulteriori sviluppi nell'ambito delle teorie operazionali.

Si definiscano le seguenti misure generalizzate ad otto outcome per uno stato di qubit:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C+} &\doteq \frac{1}{4}P_{|C=+1\rangle} \doteq \frac{1}{4}[\mathbb{1} - P_{|C=-1\rangle}] = \frac{1}{4}|C=+1\rangle\langle C=+1| \\ \mathcal{E}_{C-} &\doteq \frac{1}{4}P_{|C=-1\rangle} \doteq \frac{1}{4}[\mathbb{1} - P_{|C=+1\rangle}] = \frac{1}{4}|C=-1\rangle\langle C=-1| \end{aligned}$$

e analogamente \mathcal{E}_{E+} , \mathcal{E}_{E-} , \mathcal{E}_{F+} , \mathcal{E}_{F-} , \mathcal{E}_{G+} , \mathcal{E}_{G-} . Le lettere C, E, F, G identificano le direzioni costituite dalle diagonali interne di un cubo (si veda la figura 17a); $P_{|C=+1\rangle}$ è invece il

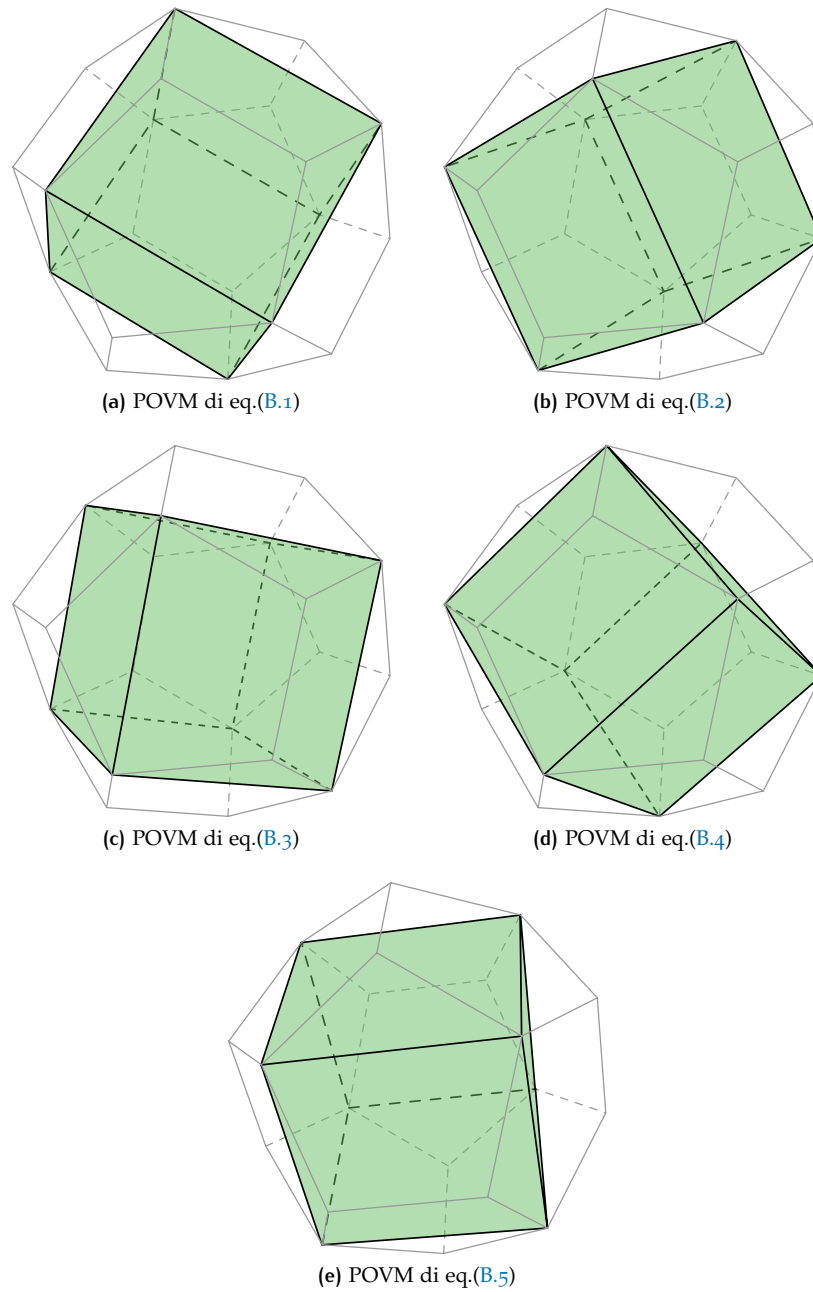


Figura 18.: Immagine raffigurante tutti i possibili cubi inscrivibili in un dodecaedro. Ogni coppia di cubi condivide due vertici.

proiettore sullo stato di qubit ortogonale a $|C = -1\rangle$. La somma di questi otto operatori semi-definiti positivi è uguale a $\mathbb{1}$, e pertanto nel loro complesso costituiscono una POVM.

Si consideri un dodecaedro regolare, e si indichino con A, B, C, \dots, J , le dieci direzioni corrispondenti alle specifiche dieci diagonali interne indicate in figura 17b. In figura 18 sono illustrati tutti i possibili cubi che è possibile inscrivere in un dodecaedro: in totale sono cinque, e ciascuna coppia di cubi condivide due vertici antipodali. È possibile associare ad ogni cubo una POVM, in maniera del tutto analoga a quanto fatto precedentemente. Si ottengono pertanto le seguenti cinque misure generalizzate:

$$\mathcal{E}_{A+} + \mathcal{E}_{A-} + \mathcal{E}_{C+} + \mathcal{E}_{C-} + \mathcal{E}_{I+} + \mathcal{E}_{I-} + \mathcal{E}_{J+} + \mathcal{E}_{J-} = \mathbb{1} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{E}_{A+} + \mathcal{E}_{A-} + \mathcal{E}_{D+} + \mathcal{E}_{D-} + \mathcal{E}_{G+} + \mathcal{E}_{G-} + \mathcal{E}_{H+} + \mathcal{E}_{H-} = \mathbb{1} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{E}_{B+} + \mathcal{E}_{B-} + \mathcal{E}_{D+} + \mathcal{E}_{D-} + \mathcal{E}_{F+} + \mathcal{E}_{F-} + \mathcal{E}_{J+} + \mathcal{E}_{J-} = \mathbb{1} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{E}_{B+} + \mathcal{E}_{B-} + \mathcal{E}_{E+} + \mathcal{E}_{E-} + \mathcal{E}_{H+} + \mathcal{E}_{H-} + \mathcal{E}_{I+} + \mathcal{E}_{I-} = \mathbb{1} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{E}_{C+} + \mathcal{E}_{C-} + \mathcal{E}_{E+} + \mathcal{E}_{E-} + \mathcal{E}_{F+} + \mathcal{E}_{F-} + \mathcal{E}_{G+} + \mathcal{E}_{G-} = \mathbb{1} \quad (\text{B.5})$$

Ognuna delle equazioni precedenti contiene otto operatori semi-definiti positivi la cui somma è l'operatore identità. Un modello non-contestuale deve essere in grado di assegnare un solo outcome per ogni cubo, dal momento che ognuno di essi rappresenta un test osservativo completo. Tale assegnazione non è però possibile: ogni outcome appare due volte nelle eq.(B.1)-(B.5), e pertanto una preassegnazione dei risultati delle misure dovrebbe individuare un numero pari di possibilità. D'altro canto il numero di test, e quindi il numero di preassegnazioni dei risultati corretti, deve essere dispari, arrivando in tal modo ad una contraddizione.

Il risultato è un chiaro esempio di problema di colorazione: non è possibile colorare di bianco o nero i vertici di un dodecaedro in modo che ognuno dei cinque cubi iscritti abbia uno e un solo vertice nero.

B.2 ARGOMENTO GEOMETRICO IN DIMENSIONE 3

Si considerino i sottospazi 1-dimensionali corrispondenti alle combinazioni lineari reali non nulle di tre vettori ortogonali in \mathbb{C}^k , con $k \geq 3$. Tali sottospazi possono essere identificati con i punti della superficie di una sfera. Si scelga una tripla ortogonale arbitraria, e sia identificata con il polo nord di tale sfera e da due punti equatoriali separati longitudinalmente di $\pi/2$. Si fissi un punto Ψ_0 che non sia il polo nord e che non giaccia sull'equatore. Si consideri il cerchio massimo passante per Ψ che taglia l'equatore in due punti separati longitudinalmente rispetto a Ψ_0 di $\pm\pi/2$. Si scelga uno di questi due punti e lo chiami Ψ_0^E . Venga invece denotato con Ψ_0^\perp il punto sull'emisfero nord perpendicolare al piano che contiene il cerchio massimo citato precedentemente. La longitudine di Ψ_0^\perp è uguale a quella di Ψ_0 più π , e la latitudine è uguale a quella di Ψ_0 meno $\pi/2$. La tripla individuata dai punti $\Psi_0, \Psi_0^E, \Psi_0^\perp$ è ortogonale. Si veda la figura 19a per la costruzione appena effettuata.

Si denoti con Ψ_1 un punto arbitrario più a sud di Ψ_0 situato sul cerchio massimo nominato precedentemente per la costruzione di Ψ_0^E e Ψ_0^\perp . Previa costruzione di una circonferenza di raggio massimo passante per Ψ_1 che interseca l'equatore in due punti longitudinalmente separati da Ψ_1 di $\pm\pi/2$, è possibile costruire in maniera analoga alla precedente i punti Ψ_1^E e Ψ_1^\perp (vedi figura 19b). È possibile reiterare il procedimento trovando in tal modo Ψ_3, \dots, Ψ_n , dove per costruzione Ψ_{i+1} è più a sud di Ψ_i . In [14] gli autori R. Cooke, M. Keane e W. Moran mostrano come su di una semisfera sia sempre possibile andare da un punto più a nord, ad un punto più a sud tramite una successione finita di costruzioni come la precedente: è cioè possibile trovare una sequenza finita degli Ψ_i precedenti tali che Ψ_0 sia il punto iniziale e Ψ_n il punto finale.

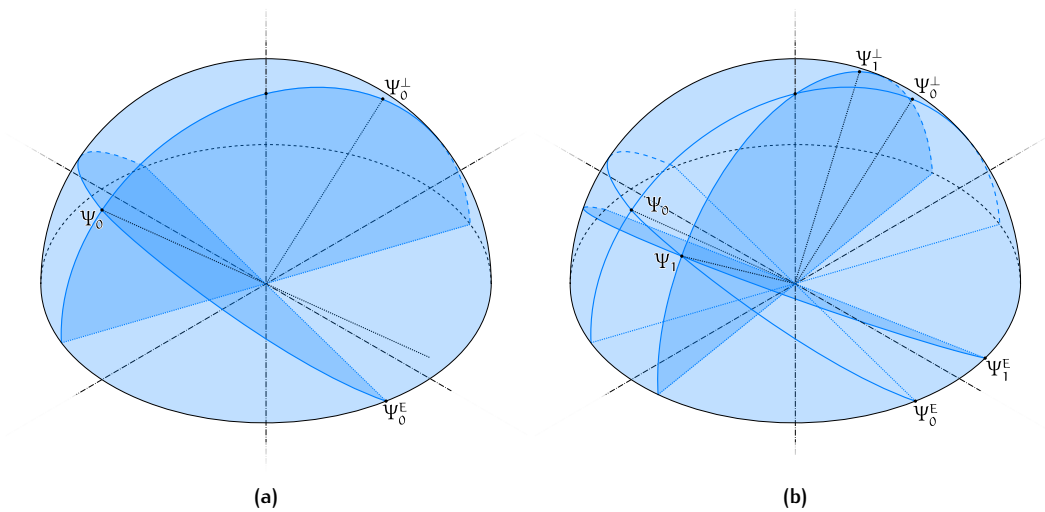


Figura 19.: Immagine raffigurante la costruzione geometrica intuitiva per una dimostrazione geometrica del teorema di Kochen-Specker.

Fatta la premessa precedente è ora possibile dimostrare un analogo del teorema di Kochen-Specker, basato sulla colorazione di punti su una semisfera. Si inizi con una terna ortogonale e si colori uno di tali punti di rosso e gli altri due di verde: senza perdita di generalità sia il nord quello rosso. Ogni altro punto dell'equatore sarà anch'esso verde visto che ogni coppia di punti appartenenti all'equatore fra loro perpendicolari formano con il nord una terna ortogonale, e in ogni terna può solamente esserci una direzione rossa; essendo già il nord rosso, tutti le altre direzioni che col nord formano una terna ortogonale saranno verdi. Si prenda un punto Ψ di latitudine $\pi/3$. Da questo è possibile costruire Ψ^\perp , Ψ^E . Si supponga che Ψ sia verde; allora dal momento che Ψ^E è verde – appartiene infatti all'equatore – Ψ^\perp dovrà essere rosso. Tutti i punti appartenenti al cerchio di raggio massimo contenente Ψ e Ψ^E sono una combinazione lineare di Ψ^E e Ψ . Dal momento che quest'ultimi sono verdi si ricava che tutti i punti appartenenti a tale cerchio massimo sono verdi. Ripetendo il ragionamento si dimostra quindi che ogni punto raggiungibile in un numero finito di passi tramite la costruzione precedente è anch'esso verde. Ψ^\perp è più a sud di Ψ , e pertanto raggiungibile in un numero finito di passi: esso deve quindi essere verde, contro all'ipotesi che lo voleva rosso.

Pertanto Ψ^E non può essere verde; in questo modo si è mostrato che ogni punto situato a $\pi/6$ dal un punto rosso è a sua volta rosso. Si tracci ora il seguente percorso: in tre passi ampi $\pi/6$ si vada dal nord all'equatore; si facciano ulteriori tre passi di $\pi/6$ radianti lungo l'equatore, e infine si ritorni al nord sempre in tre passi uguali. I punti estremali individuati dal percorso sull'equatore, insieme al nord formano una terna ortogonale: si conclude quindi che solo uno dei tre può essere rosso. Ma si è appena mostrato che devono essere tutti e tre rossi, arrivando in questo modo ad una contraddizione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. Abbagnano. *Dizionario di filosofia*. UTET, 3 edition, 2006.
- [2] Ali Ahanj, Samir Kunkri, Ashutosh Rai, Ramij Rahaman, and Pramod S. Joag. Bound on hardy's nonlocality from the principle of information causality. *Phys. Rev. A*, 81(3):032103, Mar 2010.
- [3] Gregg Jaeger Alisa Bokulich, editor. *Philosophy of Quantum Information and Entanglement*. Cambridge University Press., 2010.
- [4] Jonathan Barrett, Noah Linden, Serge Massar, Stefano Pironio, Sandu Popescu, and David Roberts. Nonlocal correlations as an information-theoretic resource. *Phys. Rev. A*, 71(2):022101, Feb 2005.
- [5] J S Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964.
- [6] J. S. Bell. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy*, pages 29–39. Cambridge University Press, 1987.
- [7] Adam Brandenburger and Noson Yanofsky. A classification of hidden-variable properties. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(42), 2008.
- [8] Adán Cabello. Bell's theorem with and without inequalities for the three-qubit greenberger-horne-zeilinger and w states. *Phys. Rev. A*, 65(3):032108, Feb 2002.
- [9] Adán Cabello. Kochen-specker theorem for a single qubit using positive operator-valued measures. *Phys. Rev. Lett.*, 90(19):190401, May 2003.
- [10] G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti. Informational derivation of Quantum Theory. *ArXiv e-prints*, November 2010.
- [11] Giulio Chiribella, Giacomo Mauro D'Ariano, and Paolo Perinotti. Probabilistic theories with purification. *Phys. Rev. A*, 81(6):062348, Jun 2010.
- [12] J. H. Conway and S. Kochen. The strong free will theorem. *Notices of the AMS*, 56(2):226–232, 2009.
- [13] John Conway and Simon Kochen. The free will theorem. *Foundations of Physics*, 36:1441–1473, 2006. 10.1007/s10701-006-9068-6.
- [14] Roger Cooke, Michael Keane, and William Moran. An elementary proof of gleason's theorem. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 98(01):117–128, 1985.
- [15] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47(10):777–780, May 1935.
- [16] Gian Carlo Ghirardi. *Un'occhiata alle carte di Dio. Gli interrogativi che la scienza moderna pone all'uomo*, chapter 3. Il Saggiatore, 1997.
- [17] Richard D Gill and Michael S Keane. A geometric proof of the kochen - specker no-go theorem. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(12):L289, 1996.

- [18] N. Gisin. The Free Will Theorem, Stochastic Quantum Dynamics and True Becoming in Relativistic Quantum Physics. *ArXiv e-prints*, February 2010.
- [19] Nicolas Gisin. Impossibility of covariant deterministic nonlocal hidden-variable extensions of quantum theory. *Phys. Rev. A*, 83(2):020102, Feb 2011.
- [20] Sheldon Goldstein, Daniel V. Tausk, Roderich Tumulka, and Nino Zanghì. What does the free will theorem actually prove? *Notices of the AMS*, 57(11):1451–1453, 2009.
- [21] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*, chapter 3. Springer, 2nd edition edition, 2003.
- [22] Lucien Hardy. Quantum mechanics, local realistic theories, and lorentz-invariant realistic theories. *Phys. Rev. Lett.*, 68(20):2981–2984, May 1992.
- [23] Lucien Hardy. Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, 71(11):1665–1668, Sep 1993.
- [24] Lucien Hardy. Foliabile Operational Structures for General Probabilistic Theories. 2009.
- [25] Carsten Held. The kochen-specker theorem. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2008 edition, 2008.
- [26] Jon P. Jarrett. On the physical significance of the locality conditions in the bell arguments. *Noûs*, 18(4):pp. 569–589, 1984.
- [27] Samir Kunkri, Sujit K. Choudhary, Ali Ahanj, and Pramod Joag. Nonlocality without inequality for almost all two-qubit entangled states based on cabello’s nonlocality argument. *Phys. Rev. A*, 73(2):022346, Feb 2006.
- [28] A J Leggett. Realism and the physical world. *Reports on Progress in Physics*, 71(2):022001, 2008.
- [29] T. Menon. The conway kochen free will theorem. manoscritto, 2009.
- [30] Travis Norsen. Epr and bell locality. *AIP Conference Proceedings*, 844(1):281–293, 2006.
- [31] Travis Norsen. Against ‘realism’. *Foundations of Physics*, 37:311–340, 2007. 10.1007/s10701-007-9104-1.
- [32] C. Poppinga F. Steinert O. Moeschlin, E. Grycko. *Discrete Stochastics*, chapter 4. Springer, 2003.
- [33] Mladen Pavičić, Jean-Pierre Merlet, Brendan McKay, and Norman D Megill. Kochen–specker vectors. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(7):1577, 2005.
- [34] Richard C. Tolman. *The Theory of the Relativity of Motion*, pages 54–55. Dover Phoenix Editions, 1917.
- [35] Roderich Tumulka. Comment on “the free will theorem”. *Foundations of Physics*, 37:186–197, 2007. 10.1007/s10701-006-9098-0.
- [36] John von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer-Verlag, 1932. tradotto come *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955.

