

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
FACOLTÀ DI SCIENZE MAT. FIS. NAT.
DIPARTIMENTO DI FISICA “A. VOLTA ”

Misure ripetibili del campo di radiazione

Relatore:
Chiar.^{mo} Prof. G. M. D'Ariano

Tesi di Laurea
di Massimiliano Federico Sacchi

Anno Accademico 1994/95

Indice

Introduzione	5
1 Misurazione quantistica	9
1.1 “Statistica” di una misura	10
1.2 “Strumento” e “POM” di una misura	15
1.3 Realizzabilità di uno strumento di misura	18
1.4 Proprietà della POM	23
1.5 Statistica di misure ripetute	27
1.6 “Precisione” e “risoluzione”	29
1.7 Limite standard quantistico per misure ripetute	34
1.8 Principio di indeterminazione per misure congiunte	39
1.9 Misure di Gordon-Louisell	41
2 Misure ripetibili nello spazio delle fasi	45
2.1 Schema di misura	46
2.2 POM congiunta coerente	50
2.3 Strumento e riduzione	54

2.4	Osservabili nello spazio delle fasi	58
2.5	Strumenti e POM marginali	62
3	Misura di fase del campo a due modi	74
3.1	Autostati di $a + b^\dagger$	75
3.2	Apparato sperimentale	77
3.3	Distribuzione di probabilità della fase	81
3.4	Limiti di validità	85
3.5	Schema per misure ripetibili	89
	Conclusioni	94
	Bibliografia	96

Introduzione

Nella formulazione standard della meccanica quantistica le grandezze fisiche osservabili sono rappresentate da operatori autoaggiunti sullo spazio di Hilbert descrivente il sistema. La distribuzione di probabilità del risultato di una misura è dettata dalla formula statistica di Born, mentre lo stato successivo alla misura (per misure di prima specie) è desunto dalle proprietà spettrali degli operatori autoaggiunti, invocando il postulato di proiezione. Al di là delle difficoltà del problema di interpretazione originate dal postulato di proiezione, tale formulazione rivela indubbe inadeguatezze nell'ambito di particolari misure. Anzitutto, essa non è in grado di fornire una trattazione rigorosa e quantitativa delle misure approssimate, mancando della veste matematica per l'ineliminabile inaccuratezza con cui uno strumento misura osservabili a spettro continuo. In secondo luogo, il postulato di proiezione non può applicarsi nel caso di misure congiunte di osservabili non compatibili (operatori non commutanti), e pertanto non è direttamente ricavabile in tale ambito una scrittura neppure formale dello stato di riduzione. Infine, esistono grandezze fisiche misurabili—come la fase di un singolo modo del campo

elettromagnetico—che di fatto non sono descrivibili da operatori autoaggiunti sul solo spazio di Hilbert del sistema, bensì su uno spazio più ampio che rappresenta il sistema originale interagente con un appropriato apparato di misura.

La teoria generale della misurazione di Ozawa esposta nel primo capitolo risolve elegantemente questa serie di problemi introducendo le nozioni di “strumento” e POM (probability operator-valued measure), le quali forniscono rispettivamente la riduzione e la distribuzione di probabilità di una misura. Lo “strumento” è una mappa tra operatori densità descriventi lo stato del sistema, ottenuta attraverso operazioni di inferenza statistica. Esso contiene informazioni circa la retroazione dell’apparato di misura sul sistema, e permette di descrivere misure ripetute di qualunque natura. La POM generalizza la misura a valore di proiettori associata alle osservabili quantistiche. I proiettori sono sostituiti da operatori positivi generalmente non ortogonali, i quali risolvono comunque l’identità e forniscono quindi distribuzioni di probabilità normalizzate.

Nell’ambito delle misure approssimate la teoria introduce due distinte grandezze, la “precisione” e la “risoluzione”, che valutano rispettivamente l’incaccuratezza della misura non ideale ed il disturbo retroattivo sul sistema da parte dell’apparato. Di qui segue una derivazione rigorosa del limite standard quantistico per misure ripetute, la quale mette in luce le errate ipotesi restrittive della derivazione tradizionale.

Un'illuminante esemplificazione di misura congiunta ripetibile di una coppia di osservabili non compatibili è fornita nel secondo capitolo. Le osservabili in questione sono due quadrature coniugate relative a un singolo modo del campo di radiazione (l'equivalente della posizione e momento canonico di un oscillatore armonico). La POM congiunta della misura è rappresentata dal proiettore sullo stato coerente del campo, e lo "strumento" produce uno stato di riduzione coerente, indipendente dallo stato iniziale. Da questo tipo di misura congiunta è possibile ottenere il valore di osservabili singole, ma le risultanti relazioni di indeterminazione di Heisenberg sono più stringenti di quelle usuali (che si riferiscono a misure semplici e non simultanee). In definitiva, la misura congiunta introduce di principio del rumore aggiunto.

Un caso rilevante di misura ottenibile da misurazione congiunta è quello della fase di un singolo modo del campo elettromagnetico, di interesse per l'interferometria ad alta sensibilità e per la rivelazione di onde gravitazionali. Questo tipo di misura non si può descrivere con i metodi tradizionali in quanto non esiste un operatore autoaggiunto per la fase; d'altra parte la fase è intrinsecamente derivata da una misura congiunta della parte reale e di quella immaginaria del campo. La teoria quantistica della stima, astruendo dal particolare schema di misura, fornisce la POM di una misura ideale della fase, ma a tutt'oggi non è ancora stato individuato uno schema concreto che approssimi tale misura.

Nel secondo capitolo si deducono la POM e lo "strumento" per la fase come

integrali marginali delle rispettive quantità per la misura congiunta. La POM che si ottiene è la stessa di quella della misura eterodina della fase, ma con il vantaggio della ripetibilità. Le difficoltà teoriche per la misura esatta della fase per il singolo modo sono connesse con la semilimitatezza dello spettro dell'operatore numero, al quale la fase è canonicamente coniugata nel senso della trasformata di Fourier. Una strada alla soluzione del problema della misura esatta della fase si apre se si considerano due modi del campo, anziché uno soltanto. In questo caso, un operatore differenza di fase risulta ben definito, autoaggiunto e coniugato ad un operatore differenza di numeri non più limitato.

Il terzo capitolo, alla luce di queste considerazioni, presenta il primo schema sperimentale per la misura di fase del campo a due modi al limite della sensibilità ideale. I due modi rappresentano il segnale e la banda immagine di un rivelatore eterodina, mentre il campo è preparato in uno stato che approssima gli autostati della fotocorrente misurata, descritta da una coppia di operatori hermitiani commutanti (la parte reale e immaginaria della fotocorrente complessa). Viene inoltre fornito uno schema sperimentale per la misura di fase ripetibile, il quale, a differenza dello schema illustrato nel secondo capitolo, non è soggetto a restrizioni di indeterminazione.

Capitolo 1

Misurazione quantistica

In questo capitolo viene esposta una teoria generale della misurazione quantistica ispirata ai lavori di Ozawa. Si definiscono lo “strumento” e la POM (probability operator-valued measure) della misura, atti a dare una descrizione matematica rispettivamente della riduzione e della distribuzione di probabilità, elementi costituenti la “statistica” della misura sperimentata da un osservatore che applica la meccanica quantistica al sistema oggetto. Viene quindi imposta la consistenza con la descrizione statistica di un secondo osservatore, il quale, operata in seno all’apparato di misura la distinzione tra “probe” (parte interagente direttamente con il sistema) e “detector” (parte che effettua una misura di tipo demolitivo sul probe), applica la meccanica quantistica al sistema composto oggetto+probe di cui è nota l’evoluzione unitaria che descrive l’interazione. Di qui si deriva un criterio generale circa la realizzabilità di uno strumento di misura. Seguono alcune considerazioni relative alle difficoltà del problema di interpretazione che la teoria permette

abilmente di aggirare e al confronto con l'approccio convenzionale che invoca il postulato di proiezione.

Ricavata la statistica di misure ripetute, viene discussa e negata l'ipotesi di ripetibilità per osservabili con spettro continuo. Sono quindi date le distinte definizioni di "precisione" e "risoluzione" che permettono una trattazione rigorosa della statistica di misure approssimate, nonché la deduzione del limite standard quantistico sotto un'ipotesi aggiuntiva rispetto alla derivazione tradizionale, su cui si gioca la realizzabilità di uno schema di misura che conduce ad una violazione.

Definite le POM marginali di una misura congiunta, viene ricavata in termini di POM la relazione di indeterminazione nella versione più stringente relativa alla misura simultanea di osservabili non commutanti. Il capitolo si chiude con la descrizione delle misure di Gordon-Louisell, le quali meglio rappresentano la misura "ideale" di osservabili con spettro continuo.

1.1 "Statistica" di una misura

Al fine di discutere ogni possibile misura quantistica adottiamo la consueta classificazione: una misura è di prima specie se non distrugge la descrizione quantomeccanica del sistema, cosicché sia possibile, in linea di principio, determinare lo stato successivo alla misura; una misura è di seconda specie se distrugge la descrizione quantomeccanica del sistema. Con "statistica" di una misura di prima specie intenderemo due elementi: la densità di proba-

bilità $P(a|\psi)$ di ottenere il risultato a dal sistema nello stato iniziale ψ e la riduzione $\psi \rightarrow \psi_a$ dello stato del sistema dopo la misura con risultato a . La “statistica” di una misura di seconda specie sarà allora caratterizzata dalla sola densità di probabilità $P(a|\psi)$ di ottenere un certo risultato, dato lo stato iniziale ψ .

Con assiomi della meccanica quantistica intenderemo gli assiomi della meccanica quantistica non relativistica, senza regole di superselezione, ridotti a:

1. Definizione di osservabili e stati rispettivamente come operatori autoaggiunti e vettori normalizzati di uno spazio di Hilbert.
2. Equazione di Schrödinger tempo-dipendente.
3. Formula statistica di Born per la distribuzione di probabilità di osservabili commutanti.

Assumeremo allora che per ogni osservabile A con decomposizione spettrale

$$\hat{A} = \int x d\hat{A}(x) \tag{1.1}$$

esista una misura di seconda specie tale che la densità di probabilità $P(a|\psi)$ soddisfi la formula statistica di Born

$$P(a|\psi)da = \langle \psi | d\hat{A}(a) | \psi \rangle \tag{1.2}$$

per qualunque stato iniziale ψ .

Chiameremo detector per un’osservabile A ogni apparato di misura che soddisfi l’equazione (1.2). Osserviamo che questa assunzione non implica

l'esistenza di alcuna misura di prima specie. Per descrivere con gli assiomi posti delle misure di prima specie adottiamo lo schema di misura istituito da von Neumann.

Supponiamo che un sistema quantistico S (“sistema oggetto”), descritto da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , debba essere misurato da un apparato e sia ψ lo stato precedente la misura. Per l'osservatore I, il quale applica la meccanica quantistica esclusivamente al sistema oggetto, supponiamo che tale misura sia di prima specie e indichiamo con $P_I(a|\psi)$ e $\psi \rightarrow \psi_a$ la relativa statistica. Ora, per dare una descrizione quantomeccanica della misura, separiamo l'apparato in due parti: la prima parte P (“probe”) è un sistema descritto dallo spazio di Hilbert \mathcal{K} che interagisce direttamente con il sistema oggetto S; la seconda parte è un detector che effettua una misura di seconda specie di un'osservabile del probe, immediatamente dopo l'interazione. Per assicurare la riproducibilità di tale schema di misura si intende che il probe venga sempre preparato nello stato iniziale fissato φ . Siano infine \hat{U} l'operatore unitario sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ corrispondente all'evoluzione temporale del sistema composto S+P per la durata dell'interazione ed A l'osservabile del probe misurato dal detector. Prima dell'interazione lo stato del sistema composto è $\psi \otimes \varphi$; dopo l'interazione risulterà essere $\hat{U}(\psi \otimes \varphi)$.

Per l'osservatore II, il quale applica la meccanica quantistica al sistema composto S+P, la distribuzione di probabilità $P_{II}(a|\psi)$ dell'osservabile A

nello stato $\hat{U}(\psi \otimes \varphi)$ soddisferà secondo la formula di Born la relazione

$$P_{II}(a|\psi)da = \langle \hat{U}(\psi \otimes \varphi) | \hat{1} \otimes d\hat{A}(a) | \hat{U}(\psi \otimes \varphi) \rangle . \quad (1.3)$$

dove $\hat{1}$ indica l'operatore identità.

Dalla consistenza dei due osservatori segue

$$P_I(a|\psi)da = \langle \hat{U}(\psi \otimes \varphi) | \hat{1} \otimes d\hat{A}(a) | \hat{U}(\psi \otimes \varphi) \rangle . \quad (1.4)$$

Per determinare lo stato di riduzione assumiamo che immediatamente dopo l'interazione il sistema oggetto sia sottoposto ad una misura di seconda specie di un'arbitraria osservabile X. Poiché nella descrizione dell'osservatore II anche il probe è soggetto alla misura dell'osservabile A immediatamente dopo l'interazione, la densità di probabilità congiunta $P_{II}(x, a|\psi)$ di ottenere il risultato $A=a$ ed $X=x$ è data dalla relazione

$$P_{II}(x, a|\psi)da dx = \langle \hat{U}(\psi \otimes \varphi) | d\hat{X}(x) \otimes d\hat{A}(a) | \hat{U}(\psi \otimes \varphi) \rangle . \quad (1.5)$$

Per l'osservatore I la misura dell'osservabile X avviene sul sistema nello stato ψ_a , dato il risultato a della prima misura, per cui la densità di probabilità dello stesso evento è calcolata nel modo seguente

$$P_I(x, a|\psi)da dx = \langle \psi_a | d\hat{X}(x) | \psi_a \rangle P_I(a|\psi) da . \quad (1.6)$$

Dalla consistenza della statistica dei due osservatori otteniamo

$$\langle \psi_a | d\hat{X}(x) | \psi_a \rangle = \frac{\langle \hat{U}(\psi \otimes \varphi) | d\hat{X}(x) \otimes d\hat{A}(a) | \hat{U}(\psi \otimes \varphi) \rangle}{\langle \hat{U}(\psi \otimes \varphi) | \hat{1} \otimes d\hat{A}(a) | \hat{U}(\psi \otimes \varphi) \rangle} . \quad (1.7)$$

Dall'arbitrarietà di X segue per qualunque base $\{|i\rangle\}$ per lo spazio \mathcal{H}

$$\langle i|\psi_a\rangle\langle\psi_a|j\rangle = \frac{\langle\hat{U}(\psi\otimes\varphi)|(|j\rangle\langle i|\otimes d\hat{A}(a))|\hat{U}(\psi\otimes\varphi)\rangle}{\langle\hat{U}(\psi\otimes\varphi)|\hat{1}\otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi\otimes\varphi)\rangle}, \quad (1.8)$$

e quindi

$$|\psi_a\rangle\langle\psi_a| = \sum_{i,j} |i\rangle\frac{\langle\hat{U}(\psi\otimes\varphi)|(|j\rangle\langle i|\otimes d\hat{A}(a))|\hat{U}(\psi\otimes\varphi)\rangle}{\langle\hat{U}(\psi\otimes\varphi)|\hat{1}\otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi\otimes\varphi)\rangle}\langle j|. \quad (1.9)$$

L'osservatore II può pertanto calcolare la statistica di questa misura dalla conoscenza dell'apparato caratterizzato dalla quaterna $\Xi = [\mathcal{K}, \varphi, \hat{U}, \hat{A}]$ consistente in uno spazio di Hilbert \mathcal{K} , uno stato φ di \mathcal{K} , un operatore unitario \hat{U} su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ ed un operatore autoaggiunto \hat{A} su \mathcal{K} . Mentre l'osservatore I conosce solo la relazione tra il risultato a e lo stato finale ψ_a , l'osservatore II conosce la dinamica dell'interazione tra il sistema oggetto ed il probe dalla quale può predire tutta la statistica della misura che l'osservatore I sperimenta. Si dice generalmente che lo stato di riduzione sia una conseguenza dell'osservazione o della conoscenza del risultato. Se così fosse si avrebbe una contraddizione tra le descrizioni dei due osservatori. Infatti, per l'osservatore I la riduzione avverrebbe dopo la misura del probe, contrariamente al fatto che per l'osservatore II essa avverrebbe già prima della misura del probe ed immediatamente dopo l'interazione oggetto-probe. Non sussiste quindi nella nostra formulazione alcuna relazione di causalità tra il risultato a e lo stato finale ψ_a , ma esclusivamente una correlazione statistica.

Introdurremo ora una rappresentazione matematica generale della statisti-

ca di una misura, trovando quindi le condizioni per cui sia possibile una descrizione secondo l'osservatore II che conduce alla medesima statistica.

1.2 “Strumento” e “POM” di una misura

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert di un sistema oggetto e sia data la statistica di una misura, vale a dire la densità di probabilità $P(a|\psi)$ e la riduzione $\psi \rightarrow \psi_a, \forall \psi \in \mathcal{H}$. Estendiamo anzitutto questa descrizione statistica al caso in cui lo stato del sistema sia una miscela, descritta da un operatore densità $\hat{\rho}$ con la sua decomposizione spettrale

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i |\psi^i\rangle \langle \psi^i|. \quad (1.10)$$

La densità di probabilità $P(a|\hat{\rho})$ sarà data in questo caso dalla relazione

$$P(a|\hat{\rho}) = \sum_i \lambda_i P(a|\psi^i). \quad (1.11)$$

Lo stato del sistema $\hat{\rho}_a$ dopo la misura con risultato a è una miscela degli stati $|\psi_a^i\rangle \langle \psi_a^i|$, dove ψ_a^i è lo stato ridotto corrispondente allo stato iniziale ψ^i , tali che la loro frequenza relativa sia proporzionale a λ_i e a $P(a|\psi^i)$.

Avremo quindi

$$\hat{\rho}_a = \frac{\sum_i \lambda_i P(a|\psi^i) |\psi_a^i\rangle \langle \psi_a^i|}{\sum_i \lambda_i P(a|\psi^i)}. \quad (1.12)$$

Sia Δ un insieme boreliano della retta reale e S_Δ il sottoinsieme dei campioni del sistema oggetto selezionati dalla condizione che il risultato a della misura cada in Δ . Lo stato $\hat{\rho}_\Delta$ di S_Δ dopo la misura è una miscela degli stati $|\psi_a\rangle \langle \psi_a|$ con $a \in \Delta$, la cui frequenza relativa è proporzionale a $P(a|\psi)$.

Pertanto

$$\hat{\rho}_\Delta = \frac{\int_\Delta da P(a|\psi) |\psi_a\rangle \langle \psi_a|}{\int_\Delta da P(a|\psi)}. \quad (1.13)$$

Nel caso in cui lo stato iniziale sia una miscela rappresentata da $\hat{\rho}$ avremo

$$\hat{\rho}_\Delta = \frac{\int_\Delta da P(a|\hat{\rho}) \hat{\rho}_a}{\int_\Delta da P(a|\hat{\rho})}, \quad (1.14)$$

con $\hat{\rho}_a$ data dall'equazione (1.12).

Definiamo allora una trasformazione $\mathcal{I}(\Delta)$ che mappa un operatore densità in un operatore di classe traccia $\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}$ attraverso le relazioni [1]

$$\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} = \int_\Delta d\mathcal{I}(a)\hat{\rho} \quad (1.15)$$

$$d\mathcal{I}(a)\hat{\rho} = da P(a|\hat{\rho})\hat{\rho}_a. \quad (1.16)$$

Richiederemo inoltre che per una $\hat{\rho}$ miscela di $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$, $\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}$ sia miscela di $\mathcal{I}(\Delta)\hat{\sigma}_1$ e $\mathcal{I}(\Delta)\hat{\sigma}_2$. Di qui la trasformazione $\mathcal{I}(\Delta)$ può essere estesa alle mappe tra tutti gli operatori di classe traccia.

Dalle relazioni (1.15) e (1.16) derivano le seguenti proprietà:

- Per ogni insieme boreliano Δ , la mappa

$$\hat{\rho} \rightarrow \mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} \quad (1.17)$$

è una trasformazione lineare sullo spazio degli operatori di classe traccia che mappa operatori densità (traccia = 1) in operatori di classe traccia positivi.

- Per ogni insieme boreliano Δ e per ogni matrice densità $\hat{\rho}$

$$0 \leq \text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}] \leq 1 \quad \text{Tr}[\mathcal{I}(R)\hat{\rho}] = 1 \quad (1.18)$$

- Per ogni successione numerabile $\{\Delta_i\}$ di insiemi boreliani disgiunti e per ogni $\hat{\rho}$

$$\sum_i \text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta_i)\hat{\rho}] = \text{Tr}[\mathcal{I}(\cup_i \Delta_i)\hat{\rho}] . \quad (1.19)$$

Chiameremo “strumento” una mappa $\Delta \rightarrow \mathcal{I}(\Delta)$ con le proprietà elencate. Lo strumento \mathcal{I} unifica in un solo oggetto matematico la statistica di una misura attraverso le relazioni

$$P(a|\hat{\rho})da = \text{Tr}[d\mathcal{I}(a)\hat{\rho}] \quad \hat{\rho}_a = \frac{d\mathcal{I}(a)\hat{\rho}}{\text{Tr}[d\mathcal{I}(a)\hat{\rho}]} \quad (1.20)$$

Sia ora F una variabile casuale i cui valori mostrano il risultato di una misura. La distribuzione di probabilità $P(F \in \Delta|\hat{\rho})$ che il valore di F cada in Δ dato lo stato iniziale $\hat{\rho}$ si ottiene dalla prima delle equazioni (1.20)

$$P(F \in \Delta|\hat{\rho}) = \int_{\Delta} P(a|\hat{\rho})da . \quad (1.21)$$

In questo caso esiste un'unica mappa (POM = probability operator-valued measure) $\Delta \rightarrow \hat{F}(\Delta)$ con $\hat{F}(\Delta)$ operatore lineare limitato su \mathcal{H} , definito positivo e tale che

$$0 \leq \|\hat{F}(\Delta)\| \leq 1 \quad \hat{F}(R) = \hat{1} \quad (1.22)$$

$$\text{Tr}[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}] = P(F \in \Delta|\hat{\rho}) . \quad (1.23)$$

Chiameremo F la POM associata allo strumento \mathcal{I} . Notiamo che un'osservabile è una POM A tale che $A(\Delta)$ è un proiettore per ogni insieme boreliano Δ . Se infatti uno strumento \mathcal{I} rappresenta una misura esatta di un'osservabile $\hat{X} = \int x d\hat{X}(x)$, allora la corrispondente POM soddisfa alle relazioni

$$P(a|\hat{\rho})da = \text{Tr}[d\hat{X}(a)\hat{\rho}] \quad \text{Tr}[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}] = \int_{\Delta} \text{Tr}[d\hat{X}(x)\hat{\rho}] \quad (1.24)$$

e quindi la POM di \mathcal{I} coincide con la misura spettrale dell'operatore \hat{X} , cioè $d\hat{F}(x) = d\hat{X}(x)$. In ogni caso la POM definisce l'operatore simmetrico \hat{f}_X per ogni funzione reale f attraverso le relazioni [2]

$$\langle \xi | \hat{f}_X | \xi \rangle = \int_{\mathcal{R}} f(x) \langle \xi | d\hat{F}(x) | \xi \rangle, \quad \xi \in \text{dom}(\hat{f}_X) \quad (1.25)$$

$$\text{dom}(\hat{f}_X) = \left\{ \xi \in \mathcal{H} \mid \int_{\mathcal{R}} f(x)^2 \langle \xi | d\hat{F}(x) | \xi \rangle < \infty \right\}. \quad (1.26)$$

Osserviamo che in generale $\hat{f}_X \neq f(\hat{X})$.

Come meglio vedremo in seguito, la nozione di POM estende la descrizione convenzionale di densità di probabilità rappresentate da misure spettrali (relative ad operatori autoaggiunti) al caso di misure approssimate, di misure congiunte di osservabili non compatibili e di misure di grandezze fisiche non descrivibili da operatori autoaggiunti.

1.3 Realizzabilità di uno strumento di misura

Finora abbiamo mostrato i seguenti due fatti:

- Qualunque schema di misura che consista in un'interazione oggetto-probe e una successiva misura del probe determina la statistica della misura per mezzo della descrizione dell'osservatore II.
- Ogni statistica di misura relativa alla descrizione dell'osservatore I definisce uno strumento che unifica in un singolo oggetto matematico distribuzione di probabilità e riduzione dello stato.

Individueremo ora quali strumenti risultano consistenti con la descrizione dell'osservatore II, il quale calcola la riduzione dello stato in modo deterministico secondo gli assiomi della meccanica quantistica e dalla conoscenza della quaterna $\Xi = [\mathcal{K}, \varphi, \hat{U}, \hat{A}]$.

Sia quindi \mathcal{H} lo spazio di Hilbert che descrive il sistema oggetto ed \mathcal{I} uno strumento per lo spazio degli operatori di classe traccia su \mathcal{H} . Diremo che lo strumento \mathcal{I} è realizzabile se esistono uno spazio di Hilbert $\hat{\mathcal{K}}$, un operatore autoaggiunto \hat{A} su \mathcal{K} , un vettore di stato $\varphi \in \mathcal{K}$ ed un operatore unitario \hat{U} su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ per cui vale la relazione [1]

$$\langle i | d\mathcal{I}(a)(|\psi\rangle\langle\psi|) | j \rangle = \langle \hat{U}(\psi \otimes \varphi) | (|j\rangle\langle i| \otimes d\hat{A}(a)) | \hat{U}(\psi \otimes \varphi) \rangle \quad (1.27)$$

per ogni ψ e per ogni base $\{|i\rangle\}$ appartenenti ad \mathcal{H} .

Viceversa, dato uno strumento \mathcal{I} chiameremo realizzazione di \mathcal{I} ogni schema di misura $\Xi = [\mathcal{K}, \varphi, \hat{U}, \hat{A}]$ che soddisfa la relazione (1.27).

L'equazione (1.27) è la condizione per cui la statistica della misura data dallo strumento \mathcal{I} attraverso le relazioni (1.15) e (1.16) coincida con la sta-

tistica della misura desunta dalla descrizione dell'osservatore Π attraverso le equazioni (1.3) e (1.9).

La trasformazione $\hat{\rho} \rightarrow \mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}$ è positiva, nel senso che per ogni operatore densità $\hat{\rho}$ l'operatore di classe traccia $\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}$ è positivo.

Segue quindi

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} \quad \langle \varphi | d\mathcal{I}(a)(|\psi\rangle\langle\psi|) | \varphi \rangle \geq 0. \quad (1.28)$$

Uno strumento è detto completamente positivo (CP) se ha la proprietà più stringente per cui, per ogni sequenza finita $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ e $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ di vettori di \mathcal{H} , risulta

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i | d\mathcal{I}(a)(|\eta_i\rangle\langle\eta_j|) | \xi_j \rangle \geq 0. \quad (1.29)$$

Se \mathcal{I} è realizzabile otteniamo

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i | d\mathcal{I}(a)(|\eta_i\rangle\langle\eta_j|) | \xi_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \hat{U}(\eta_j \otimes \varphi) | (|\xi_j\rangle\langle\xi_i| \otimes d\hat{A}(a)) | \hat{U}(\eta_i \otimes \varphi) \rangle = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (|\xi_i\rangle\langle\xi_i| \otimes d\hat{A}(a)) | \hat{U}(\eta_i \otimes \varphi) \right\|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Quindi ogni strumento realizzabile è completamente positivo. Ozawa ha mostrato l'affermazione inversa [3], ovvero che ogni strumento completamente positivo è realizzabile, attraverso la costruzione matematica di uno spazio di Hilbert \mathcal{K} , con un vettore φ , un operatore autoaggiunto \hat{A} su \mathcal{K} ed un operatore unitario \hat{U} su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, per i quali è soddisfatta l'equazione (1.27) per un assegnato strumento \mathcal{I} completamente positivo. Alla luce di questa

condizione necessaria e sufficiente intenderemo in seguito con strumento, se non altrimenti specificato, uno strumento CP.

Va osservato che le elaborazioni del metodo di von Neumann suggerite da Ozawa permettono di aggirare le difficoltà del problema di interpretazione. L'interferenza statistica tra il sistema oggetto ed il probe, il contenuto cioè del paradosso del gatto di Schrödinger, svanisce nel nostro formalismo durante la misura di seconda specie del probe. La nostra derivazione dello strumento CP consistente nella determinazione dello stato di riduzione attraverso la descrizione dell'osservatore II, e quindi attraverso la conoscenza dell'interazione e dello schema di misura, non invoca il cosiddetto postulato di proiezione per lo stato $\hat{U}(\psi \otimes \varphi)$ del sistema composto oggetto+probe. Questo è il motivo per cui ci è lecito chiudere il processo di misura con una misura di tipo demolitivo sul sistema di probe. L'approccio convenzionale applica invece tale postulato subito dopo l'interazione e "deduce" dal risultato ottenuto dall'osservatore II lo stato del sistema composto oggetto+probe e di qui lo stato del sistema oggetto. Sebbene questa argomentazione abbia il vantaggio di non utilizzare l'inferenza statistica, la quale nella nostra derivazione è insita nell'aver imposto la consistenza delle statistiche relative alla descrizione dei due osservatori, sono evidenti alcuni punti deboli.

Anzitutto questa argomentazione si applica solo quando la misura del probe è di prima specie e soddisfa il postulato di proiezione. D'altra parte ogni misura di prima specie è soggetta all'equazione di Schrödinger per il sistema

composto oggetto+probe e di qui non può mai essere realizzata la dinamica che porta alle proiezioni. Si deve cioè assumere un processo di misura di seconda specie in qualche punto tra l'oggetto e l'osservatore reale per cercare di descrivere tale dinamica. Di conseguenza sorge la contraddizione che il postulato di riduzione non può essere utilizzato in quanto lo stato del sistema dopo la misura di seconda specie non può più essere descritto dalla meccanica quantistica standard.

In secondo luogo, nell'approccio convenzionale lo stato di riduzione avviene soltanto dopo la misura del probe, contrariamente al fatto che l'interazione oggetto-probe termina prima di tale misura. Questo fatto pone un evidente limite circa l'intervallo temporale tra misure successive. Secondo la nostra derivazione è possibile eseguire una seconda misura sullo stesso sistema dopo l'interazione oggetto-probe, mentre la formulazione convenzionale comporterebbe l'attesa dell'interazione macroscopica tra il probe ed il detector. Di qui, per il primo punto, non sarebbe possibile descrivere alcuna successiva misura del sistema.

Infine l'argomentazione convenzionale non può essere utilizzata per la misura di osservabili con spettro continuo come l'osservabile posizione, in quanto non vi sono proiettori sugli autospazi di osservabili con spettro continuo nella formulazione standard degli spazi di Hilbert. In questo caso possiamo utilizzare solo l'inferenza statistica.

1.4 Proprietà della POM

La formula statistica di Born relativa alla distribuzione di probabilità congiunta di un insieme $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ di osservabili compatibili per uno stato genericamente descritto da un operatore densità $\hat{\rho}$ si riscrive

$$P(A_1 \in \Delta_1, A_2 \in \Delta_2, \dots, A_n \in \Delta_n \parallel \hat{\rho}) = \text{Tr}[\hat{A}_1(\Delta_1)\hat{A}_2(\Delta_2) \cdots \hat{A}_n(\Delta_n)\hat{\rho}] \quad (1.31)$$

dove $\forall i \Delta_i$ è un insieme boreliano dell'asse reale e $\hat{A}_i(\Delta_i)$ è un proiettore. In questa notazione, ponendo $\hat{\sigma} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ e tenendo presente la (1.23) che definisce la POM, le relazioni (1.4) e (1.7) si trascrivono rispettivamente

$$P(a \in \Delta \parallel \hat{\rho}) = \text{Tr}_{S,P}[(\hat{1} \otimes \hat{A}(\Delta))\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger] = \text{Tr}_S[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}] \quad (1.32)$$

$$\text{Tr}_S[\hat{X}(\Gamma)\hat{\rho}_\Delta] = \frac{\text{Tr}_{S,P}[(\hat{X}(\Gamma) \otimes \hat{A}(\Delta))\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger]}{\text{Tr}_S[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}]} \quad (1.33)$$

Poiché X e Γ sono arbitrari segue

$$\hat{\rho}_\Delta = \frac{\text{Tr}_P[(\hat{1} \otimes \hat{A}(\Delta))\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger]}{\text{Tr}_S[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}]} \quad (1.34)$$

Dalle relazioni (1.15),(1.16) e (1.20) scriveremo quindi per lo strumento \mathcal{I}

$$\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} = \text{Tr}_P[(\hat{1} \otimes \hat{A}(\Delta))\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger], \quad (1.35)$$

per cui

$$\hat{\rho}_\Delta = \frac{\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}}{\text{Tr}_S[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}]} = \frac{\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}}{\text{Tr}_S[\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}]} . \quad (1.36)$$

Definiamo ora trasformazione duale T^* di una mappa lineare $T : \tau c(\mathcal{H}) \rightarrow \tau c(\mathcal{K})$ tra operatori di classe traccia sugli spazi di Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{K} la trasformazione lineare $T^* : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ da operatori lineari su \mathcal{K} ad operatori lineari su \mathcal{H} tale che

$$\text{Tr}_K[aT(\hat{\rho})] = \text{Tr}_H[T^*(a)\hat{\rho}] \quad \forall a \in \mathcal{L}(\mathcal{K}), \forall \hat{\rho} \in \tau c(\mathcal{H}). \quad (1.37)$$

Dall'equazione (1.32), sfruttando la proprietà di invarianza dell'operazione di traccia per permutazione ciclica, segue

$$\hat{F}(\Delta) = T_\sigma^* \left[\hat{U}^\dagger (\hat{1} \otimes \hat{A}(\Delta)) \hat{U} \right], \quad (1.38)$$

dove $T_\sigma^* : \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K})$ è la trasformazione duale della mappa $T_\sigma : \tau c(\mathcal{K}) \rightarrow \tau c(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ che associa ad ogni $\hat{\rho} \in \tau c(\mathcal{H})$ l'operatore $\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}$, con $\hat{\sigma}$ fissato operatore densità che descrive lo stato di preparazione del probe.

Osserviamo che per ogni strumento \mathcal{I} la POM F ad esso associata, essendo per l'equazione (1.35)

$$\text{Tr}[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}] = \text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}], \quad (1.39)$$

può essere determinata dalla relazione

$$\hat{F}(\Delta) = \mathcal{I}(\Delta)^* \hat{1} \quad (1.40)$$

Viceversa, è possibile mostrare [3] che per ogni POM F esiste almeno uno strumento CP \mathcal{I} che soddisfa la relazione (1.40). Ne consegue il teorema di estensione di Naimark:

- \forall POM F esiste uno schema di misura $\Xi = [\mathcal{K}, |\varphi\rangle\langle\varphi|, \hat{U}, \hat{A}]$ che soddisfa alla relazione

$$\hat{F}(\Delta) = \hat{V}^\dagger [\hat{U}^\dagger(\hat{1} \otimes \hat{A}(\Delta))\hat{U}] \hat{V} \quad \forall \Delta \in B(R), \quad (1.41)$$

dove \hat{V} è l'isometria $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ tale che $\hat{V}\psi = \psi \otimes \varphi \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$.

Quindi, pur essendo genericamente una POM una misura a valore di operatori positivi, non vi è contraddizione con l'affermazione che solo gli osservabili possano essere misurati, in quanto il teorema di Naimark assicura che ogni POM può essere estesa ad una misura a valore di proiettori su uno spazio di Hilbert più grande. D'altra parte, a differenza dei proiettori relativi alla spettralizzazione di un operatore autoaggiunto, non sussiste per una POM alcun vincolo di ortogonalità. Questo permette di descrivere ogni tipo di misura quantistica: misure esatte, misure approssimate, misure di singoli osservabili e misure congiunte di più osservabili, comprese quelle di osservabili non commutanti. La condizione di completezza, indicata nella (1.23) come $\hat{F}(R) = \hat{1}$, risulta invece indispensabile per produrre la corretta normalizzazione della probabilità dei risultati della misura.

Come abbiamo osservato, mentre uno strumento \mathcal{I} determina univocamente la POM F ad esso associata, una stessa POM può essere associata a più strumenti diversi, in accordo col fatto che possono esistere più schemi di misura che conducono alla stessa distribuzione di probabilità dei risultati. D'altra parte la POM non contiene sufficienti dettagli sull'apparato di misura

da poter determinare lo stato del sistema dopo la misurazione. La retroazione sul sistema da parte dell'apparato di misura è esclusivamente contenuta nello strumento.

Consideriamo infatti la traccia parziale sul probe (1.35) che calcola $\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}$. Utilizzando la notazione di Dirac ed assumendo per semplicità che l'osservabile A del probe abbia spettro continuo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} &= \text{Tr}_P[(\hat{1} \otimes \hat{A}(\Delta))\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger] = \\ &= \int_R da' \int_\Delta da \langle a'|a \rangle \langle a|\hat{U}|\varphi \rangle \hat{\rho} \langle \varphi|\hat{U}^\dagger|a' \rangle = \\ &= \int_\Delta da \langle a|\hat{U}|\varphi \rangle \hat{\rho} \langle \varphi|\hat{U}^\dagger|a \rangle \doteq \int_\Delta da \hat{\Omega}(a) \hat{\rho} \hat{\Omega}^\dagger(a), \quad (1.42)\end{aligned}$$

dove $\hat{\Omega}(a) \doteq \langle a|\hat{U}|\varphi \rangle$ è un operatore agente sul solo spazio di Hilbert del sistema oggetto e rappresenta l'ampiezza di probabilità del probe di essere evoluto durante l'interazione dallo stato $|\varphi \rangle$ allo stato $|a \rangle$.

Per la condizione di normalizzazione, dovendo essere

$$\text{Tr}[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}] = \text{Tr} \left[\int_\Delta da \hat{\Omega}(a) \hat{\rho} \hat{\Omega}^\dagger(a) \right] \quad \forall \rho \in \tau c(\mathcal{H}), \quad (1.43)$$

la POM F potrà scriversi

$$\hat{F}(\Delta)\hat{\rho} = \int_\Delta da \hat{\Omega}^\dagger(a) \hat{\Omega}(a) \quad \forall \Delta \in B(R). \quad (1.44)$$

Avremo quindi per la $\hat{\rho}_\Delta$ ridotta del sistema

$$\hat{\rho}_\Delta = \frac{\int_\Delta da \hat{\Omega}(a) \hat{\rho} \hat{\Omega}^\dagger(a)}{\int_\Delta da \text{Tr}[\hat{\Omega}^\dagger(a) \hat{\Omega}(a) \hat{\rho}]} . \quad (1.45)$$

È ora evidente da questa scrittura per $\hat{\rho}_\Delta$ che una qualunque trasformazione $\hat{\Omega}(a) \rightarrow \hat{\Omega}'(a) = \hat{T}(a)\hat{\Omega}(a)$, con $\hat{T}(a)$ generico operatore unitario, lascia immutata la POM F e quindi la distribuzione di probabilità del risultato della misura, pur modificando lo stato finale del sistema e dando così origine ad un nuovo strumento.

1.5 Statistica di misure ripetute

La determinazione della statistica di misure ripetute risulta immediata e consequenziale alla trattazione fin qui svolta.

Sia S un sistema quantistico descritto da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} con hamiltoniana \hat{H} e stato $\hat{\rho}$ al tempo $t=0$. Sia $\hat{\rho}(t)$ lo stato di S al tempo t in pittura di Schrödinger

$$\hat{\rho}(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar} \hat{\rho} e^{it\hat{H}/\hbar}, \quad (1.46)$$

$\Xi = [\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{A}]$ uno schema di misura per il sistema S , \mathcal{I} lo strumento di Ξ , F la POM di Ξ ed x il risultato della misura. Per descrivere la misura al tempo t , definiamo lo strumento tempo-dipendente e la POM tempo-dipendente come segue

$$\mathcal{I}(\Delta|t)\hat{\rho} = e^{it\hat{H}/\hbar} [\mathcal{I}(\Delta)(e^{-it\hat{H}/\hbar} \hat{\rho} e^{it\hat{H}/\hbar})] e^{-it\hat{H}/\hbar} \quad (1.47)$$

$$\hat{F}(\Delta|t) = \mathcal{I}(\Delta|t)^* \hat{1} = e^{it\hat{H}/\hbar} \hat{F}(\Delta) e^{-it\hat{H}/\hbar}, \quad (1.48)$$

per ogni boreliano Δ e istante t .

Dalla (1.48) osserviamo che se F è un'osservabile B , allora $\Delta \rightarrow \hat{F}(\Delta|t)$ è la misura spettrale dell'operatore autoaggiunto $\hat{B}(t)$ che rappresenta l'osservabile in descrizione di Heisenberg.

Sia ora $x(t)$ il risultato tempo-dipendente della misura Ξ . La distribuzione di probabilità di $x(t)$ in pittura di Heisenberg è definita attraverso la relazione

$$P[x(t) \in \Delta | \hat{\rho}] = P[x \in \Delta | \hat{\rho}(t)] \quad \forall \Delta \in B(R). \quad (1.49)$$

Dalle equazioni (1.47) e (1.48) segue

$$P[x(t) \in \Delta | \hat{\rho}] = \text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta|t)\hat{\rho}] = \text{Tr}[\hat{F}(\Delta|t)\hat{\rho}]. \quad (1.50)$$

Lo stato di Heisenberg $\hat{\rho}_{x(t) \in \Delta}$ del sottoinsieme dei campioni di S soddisfacenti dopo la misura alla condizione $x(t) \in \Delta$ è definito dalla relazione

$$P[O(s) \in \Gamma | \hat{\rho}_{x(t) \in \Delta}] = P[O(s) \in \Gamma | x(t) \in \Delta | \hat{\rho}] \quad (1.51)$$

per ogni boreliano Γ , osservabile O e istante $s > t$, dove la scrittura a secondo membro indica una probabilità condizionale. Sostituendo nella (1.51) lo stato di Heisenberg $\hat{\rho}$ con $\hat{\rho}(t)$ ed applicando le equazioni (1.36), (1.46) e (1.47), otteniamo

$$\begin{aligned} & P[O(s) \in \Gamma | \hat{\rho}_{x(t) \in \Delta}] = P[O(s-t) \in \Gamma | x(0) \in \Delta | \hat{\rho}(t)] = \\ & = P[O(s-t) \in \Gamma | A \in \Delta | \hat{\rho}(t)] = P[O(s-t) \in \Gamma | \hat{\rho}(t)_\Delta] = \\ & = \text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta | \hat{\rho}(t))]^{-1} \text{Tr}[\hat{O}(\Gamma | s-t) \mathcal{I}(\Delta | \hat{\rho}(t))] = \\ & = \text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta | \hat{\rho}(t))]^{-1} \text{Tr}[\hat{O}(\Gamma | s) e^{it\hat{H}/\hbar} \mathcal{I}(\Delta | \hat{\rho}(t)) e^{-it\hat{H}/\hbar}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta|t)\hat{\rho}]^{-1}\text{Tr}[\hat{O}(\Gamma|s)\mathcal{I}(\Delta|t)\hat{\rho}] = \\
&= P \left[O(s) \in \Gamma \parallel \frac{\mathcal{I}(\Delta|t)\hat{\rho}}{\text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta|t)\hat{\rho}]} \right]. \tag{1.52}
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di Γ ed O segue

$$\hat{\rho}_{x(t) \in \Delta} = \frac{\mathcal{I}(\Delta|t)\hat{\rho}}{\text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta|t)\hat{\rho}]} . \tag{1.53}$$

Supponiamo ora di compiere una sequenza di misure $\Xi_n = [\mathcal{K}_n, \hat{\sigma}_n, \hat{U}_n, \hat{A}_n]$ con $n = 1, 2, \dots, r$ agli istanti $(0 \leq) t_1 \leq \dots \leq t_r$ sul sistema S , e siano $\mathcal{I}_n(\Delta|t)$, $\hat{F}_n(\Delta|t)$ e $x_n(\Delta|t)$ rispettivamente i corrispondenti strumenti, POM e risultati tempo-dipendenti della misura.

Lo stato di Heisenberg $\hat{\rho}_{\{x_1(t_1) \in \Delta_1, \dots, x_r(t_r) \in \Delta_r\}}$ del sottoinsieme dei campioni di S soddisfacenti dopo la misura alla condizione $x_1(t_1) \in \Delta_1, \dots, x_r(t_r) \in \Delta_r$ risulterà pertanto

$$\hat{\rho}_{\{x_1(t_1) \in \Delta_1, \dots, x_r(t_r) \in \Delta_r\}} = \frac{\mathcal{I}_r(\Delta_r|t_r) \cdots \mathcal{I}_1(\Delta_1|t_1)\hat{\rho}}{\text{Tr}[\mathcal{I}_r(\Delta_r|t_r) \cdots \mathcal{I}_1(\Delta_1|t_1)\hat{\rho}]} . \tag{1.54}$$

1.6 “Precisione” e “risoluzione”

Nella formulazione di von Neumann [4] circa la misura di un'osservabile con spettro puramente discreto viene assunta l'ipotesi di ripetibilità, desunta dall'esperimento di Compton-Simons: se la quantità fisica è misurata due volte in successione su un sistema, si ottiene ogni volta lo stesso risultato. Di qui si conclude che lo stato dopo la misura di $\hat{A} = \sum_j a_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ è $|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$, purché il risultato sia a_j . Von Neumann, discutendo l'impossibilità dell'ipotesi

di ripetibilità per osservabili con spettro continuo, approssima gli osservabili attraverso operatori “a gradino” con spettro puramente discreto. L’approccio di Davies e Lewis [5], ai quali è peraltro dovuta la nozione di strumento, ricerca la soluzione non tra misure a valore di proiezione, ma tra più generali misure a valore di operatori positivi. In questo ambito è dovuto ad Ozawa [6] l’aver mostrato la non esistenza di uno strumento che soddisfi l’ipotesi di ripetibilità per la misura di osservabili con spettro continuo, come conseguenza matematica dell’esistenza degli “stati posteriori”.

Con famiglia di stati posteriori per uno stato iniziale $\hat{\rho}$ e uno strumento \mathcal{I} si intende una famiglia di operatori densità $\{\hat{\rho}_x | x \in R\}$ tali che

- la funzione $x \rightarrow \hat{\rho}_x$ è fortemente misurabile
- $\forall \Delta \in B(R) \quad \int_{\Delta} \hat{\rho}_x \text{Tr}[\mathcal{I}(dx)\hat{\rho}] = \mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} . \quad (1.55)$

Il teorema di esistenza afferma inoltre l’unicità di tale famiglia rispetto alla misura $\text{Tr}[\mathcal{I}(dx)\hat{\rho}]$ -quasi ovunque. Osserviamo che la validità di tale teorema è stata da noi implicitamente assunta nelle relazioni (1.15) e (1.16) che definiscono la mappa $\mathcal{I}(\Delta)$ e in cui viene asserita l’esistenza matematica dello stato di riduzione $\hat{\rho}_x$. In termini di stato di riduzione $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_x$ affermiamo che uno schema di misura Ξ soddisfa l’ipotesi di ripetibilità se

$$P[x \in \{y\} | \hat{\rho}_x] = \delta_{x,y} \quad \forall x, y \in R . \quad (1.56)$$

Questo è equivalente per definizione di stati posteriori alla condizione

$$\text{Tr}[\mathcal{I}(\Gamma \cap \Delta)\hat{\rho}] = \text{Tr}[\mathcal{I}(\Gamma)\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}] \quad \forall \Gamma, \Delta \in B(R) . \quad (1.57)$$

Uno strumento \mathcal{I} che soddisfi la (1.57) sarà detto debolmente ripetibile. Il teorema di Ozawa afferma che ogni strumento \mathcal{I} debolmente ripetibile è discreto, nel senso che esiste un insieme numerabile Λ per il quale $\mathcal{I}(R \setminus \Lambda) = 0$. Si deve quindi abbandonare l'ipotesi di ripetibilità per osservabili con spettro continuo. Introduremo allora alcune definizioni matematiche al fine di discutere la statistica di misure approssimate.

Una POM X è detta compatibile con un'osservabile A se vale la relazione

$$[\hat{A}(\Gamma), \hat{X}(\Delta)] = 0 \quad \forall \Gamma, \Delta \in B(R) . \quad (1.58)$$

Definiamo la precisione $\varepsilon_A(X \|\hat{\rho})$ di X per un'osservabile A relativa allo stato $\hat{\rho}$ attraverso la relazione

$$\varepsilon_A(X \|\hat{\rho})^2 = \int \int_{R^2} (x - a)^2 \text{Tr}[\hat{X}(dx)\hat{A}(da)\hat{\rho}] , \quad (1.59)$$

e chiamiamo precisione di X per A la quantità

$$\varepsilon_A(X) = \sup_{\hat{\rho}} \varepsilon_A(X \|\hat{\rho}) . \quad (1.60)$$

$\varepsilon_A(X \|\hat{\rho})$ rappresenta lo scarto quadratico medio del risultato x della misura dal risultato della misura ideale.

Una POM X A -compatibile è detta *unbiased* se $\hat{X} \equiv \int_R x \hat{X}(dx) = \hat{A}$. Questo è equivalente alla condizione

$$\text{Ex}[\hat{X} \|\hat{\rho}] = \text{Ex}[\hat{A} \|\hat{\rho}] \quad (1.61)$$

per ogni stato $\hat{\rho}$ per cui $\text{Ex}[\hat{A} \|\hat{\rho}] < \infty$, dove $\text{Ex}[\hat{f}_X \|\hat{\rho}] =$ denota il valore di aspettazione della funzione operatoriale \hat{f}_X per lo stato $\hat{\rho}$ definito dalla

relazione

$$\text{Ex}[\hat{f}_X|\hat{\rho}] = \int_R f(x)P[X \in dx|\hat{\rho}] , \quad (1.62)$$

purché l'integrale al secondo membro sia convergente. Chiameremo misura ε -approssimata di A una misura la cui POM X risulta *unbiased* e soddisfa la relazione

$$\varepsilon_A(X) \leq \varepsilon . \quad (1.63)$$

È possibile mostrare che una POM X soddisfa la relazione $\varepsilon_A(X) = 0$ se e solo se $X=A$. Inoltre, sfruttando il teorema di estensione di Naimark, vale per POM A-compatibili e *unbiased* la relazione

$$\varepsilon_A[X|\hat{\rho}]^2 = \Delta X[\hat{\rho}]^2 - \Delta A[\hat{\rho}]^2 \quad (1.64)$$

per ogni stato $\hat{\rho}$ con $\Delta X[\hat{\rho}] < \infty$, dove Δ^2 indica la varianza, calcolata per l'operatore autoaggiunto \hat{A} attraverso l'ordinaria operazione di traccia, e per la POM X secondo la definizione (1.62). Per POM A-compatibili con $\hat{A} \neq \hat{X}$ vale più generalmente la relazione

$$\varepsilon_A[X|\hat{\rho}]^2 = \Delta X[\hat{\rho}]^2 - \Delta \hat{X}[\hat{\rho}]^2 + \text{Tr}[(\hat{A} - \hat{X})^2 \hat{\rho}] , \quad (1.65)$$

dove $\Delta \hat{X}[\hat{\rho}]^2 = \text{Tr}[\hat{X}^2 \hat{\rho}] - \text{Tr}[\hat{X} \hat{\rho}]^2$.

Definiamo la risoluzione $\sigma_A[\mathcal{I}|\hat{\rho}]$ di uno strumento \mathcal{I} per un'osservabile A relativa allo stato $\hat{\rho}$ attraverso la relazione

$$\sigma_A[\mathcal{I}|\hat{\rho}]^2 = \int \int_{R^2} (x - a)^2 \text{Tr}[\hat{A}(da)\mathcal{I}(dx)\hat{\rho}] , \quad (1.66)$$

la quale può essere riscritta per una famiglia di stati posteriori $\{\hat{\rho}_x | x \in R\}$ per $\hat{\rho}$ ed \mathcal{I} nel modo seguente

$$\sigma_A[\mathcal{I} | \hat{\rho}]^2 = \int_R \text{Tr}[\mathcal{I}(dx)\hat{\rho}] \int_R (x - a)^2 \text{Tr}[\hat{A}(da)\hat{\rho}_x] . \quad (1.67)$$

$\text{Tr}[\hat{A}(da)\mathcal{I}(dx)\hat{\rho}]$ rappresenta una densità di probabilità congiunta. Pertanto la risoluzione valuta la deviazione della grandezza dopo la misura dal risultato appena ottenuto. Questa interpretazione è consistente con il fatto che la retroazione sul sistema oggetto è contenuta nello strumento e non nella POM. La precisione, essendo definita in termini di POM, a differenza della risoluzione valuta esclusivamente l'incertezza della misura.

Dalla (1.67) e dalle relazioni

$$\begin{aligned} \int_R (a - x)^2 \text{Tr}[\hat{A}(da)\hat{\rho}_x] &= \text{Tr}[\hat{A}^2\hat{\rho}_x] - 2x \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}_x] + x^2 = \\ &= \text{Tr}[\hat{A}^2\hat{\rho}_x] - \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}_x]^2 + (\text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}_x] - x)^2 = \\ &= \Delta A[\hat{\rho}_x]^2 + (\text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}_x] - x)^2 \end{aligned} \quad (1.68)$$

segue per $\Delta A[\mathcal{I}(R)\hat{\rho}] < \infty$ e POM *unbiased*

$$\sigma_A[\mathcal{I} | \hat{\rho}]^2 = \int_R \Delta A[\hat{\rho}_x]^2 \text{Tr}[\mathcal{I}(dx)\hat{\rho}] + \int_R (\text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}_x] - x)^2 \text{Tr}[\mathcal{I}(dx)\hat{\rho}] . \quad (1.69)$$

Osserviamo che se anche lo stato di riduzione della misura è *unbiased*, nel senso che il valor medio di A dopo la misura è identico al risultato ottenuto, il secondo termine nella (1.69) si annulla.

1.7 Limite standard quantistico per misure ripetute

Sia \mathcal{I} uno strumento per la misura di un'osservabile A di un sistema S , la cui evoluzione temporale durante il tempo τ tra due misure identiche è descritta da un operatore unitario \hat{U}_τ . Se $\hat{\rho}$ è lo stato di S all'istante precedente la prima misura, all'istante $t = 0$ immediatamente successivo alla misura il sistema è in uno stato posteriore $\hat{\rho}_x$ con densità di probabilità $\text{Tr}[\mathcal{I}(dx)\hat{\rho}]$. Dal risultato x l'osservatore prevede per la seconda misura al tempo $t=\tau$ il risultato $h(x) = \text{Tr}[\hat{A}(\tau)\hat{\rho}_x]$, con $\hat{A}(\tau) = \hat{U}_\tau^\dagger \hat{A}(0) \hat{U}_\tau$.

L'incertezza di tale previsione può essere valutata nel modo seguente

$$\begin{aligned} \Delta[\tau, \hat{\rho}, x]^2 &= \int_R (a - h(x))^2 P[X \in da \|\hat{\rho}_x(\tau)] = \\ &= \int_R (a - h(x))^2 \text{Tr}[\mathcal{I}(da) \hat{U}_\tau \hat{\rho}_x \hat{U}_\tau^\dagger] . \end{aligned} \quad (1.70)$$

L'incertezza di previsione $\Delta[\tau, \hat{\rho}]$ di questa misura ripetuta con intervallo τ per uno stato iniziale $\hat{\rho}$ è definita come media quadratica di $\Delta[\tau, \hat{\rho}, x]$ sui possibili risultati x della prima misura, ovvero

$$\begin{aligned} \Delta[\tau, \hat{\rho}]^2 &= \int_R \Delta[\tau, \hat{\rho}, x]^2 P(X \in dx \|\hat{\rho}) = \\ &= \int \int_{R^2} (a - h(x))^2 \text{Tr}[\mathcal{I}(da) \hat{U}_\tau \mathcal{I}(dx) \hat{\rho} \hat{U}_\tau^\dagger] . \end{aligned} \quad (1.71)$$

Dal principio di indeterminazione di Robertson [7]

$$\Delta A(0)[\hat{\rho}] \Delta A(\tau)[\hat{\rho}] \geq \frac{1}{2} \left| \text{Tr}[[\hat{A}(0), \hat{A}(\tau)]\hat{\rho}] \right| \quad (1.72)$$

e dalla (1.64), per la quale

$$\begin{aligned}\Delta[\tau, \hat{\rho}, x]^2 &= \Delta X[\hat{U}_\tau \hat{\rho}_x \hat{U}_\tau^\dagger]^2 = \\ &= \varepsilon_A[X \|\hat{U}_\tau \hat{\rho}_x \hat{U}_\tau^\dagger]^2 + \Delta A(\tau)[\hat{\rho}_x]^2, \end{aligned} \quad (1.73)$$

segue il notevole teorema [2]:

- per uno strumento \mathcal{I} con POM associata X unbiased e A -compatibile e per uno stato $\hat{\rho}$ per il quale le varianze $\Delta A(0)[\mathcal{I}(R)\hat{\rho}]$, $\Delta A(\tau)[\mathcal{I}(R)\hat{\rho}]$ sono finite, se è soddisfatta la relazione

$$\sigma_A[\mathcal{I} \|\hat{\rho}] \leq \varepsilon_A[X \|\hat{U}_\tau \mathcal{I}(R)\hat{\rho} \hat{U}_\tau^\dagger] \quad (1.74)$$

allora

$$\Delta[\tau, \hat{\rho}]^2 \geq \left| \text{Tr}[[\hat{A}(0), \hat{A}(\tau)]\mathcal{I}(R)\hat{\rho}] \right|. \quad (1.75)$$

Il limite (1.75) è detto limite standard quantistico (SQL) per misure ripetute con intervallo τ di un'osservabile A . Nel caso in cui A sia l'osservabile posizione di una massa libera, essendo $\hat{x}(\tau) = \hat{x}(0) + \hat{p}(0)\tau/m$, lo SQL afferma

$$\Delta[\tau, \hat{\rho}]^2 \geq \frac{\hbar\tau}{m} \quad (1.76)$$

qualunque sia $\hat{\rho}$.

Nella deduzione dovuta a Caves [8] dello SQL per lo schema di von Neumann per la misura della posizione vengono fatte due assunzioni. Anzitutto la varianza $\Delta(\tau)^2$ della misura di x è valutata come la somma di σ^2 , che

esprime l'imperfetta risoluzione dell'apparato di misura, e della varianza di x all'istante della misura, ossia

$$\Delta(\tau)^2 = \sigma^2 + \Delta x(\tau)^2, \quad (1.77)$$

e questo è corretto nel caso in cui l'apparato sia accoppiato linearmente con x (come effettivamente si realizza nel modello di von Neumann). In secondo luogo si assume che l'incertezza della posizione della massa dopo la prima misura non superi la risoluzione

$$\Delta x(0) \leq \sigma. \quad (1.78)$$

Sotto queste condizioni si ricava dal principio di indeterminazione

$$\Delta(\tau)^2 \geq \frac{\hbar\tau}{m}. \quad (1.79)$$

Questa derivazione, che rappresenta un raffinamento della derivazione tradizionale che sfruttava il principio di indeterminazione ed assumeva implicitamente che il termine di correlazione

$$\langle \Delta\hat{x}(0)\Delta\hat{p}(0) + \Delta\hat{p}(0)\Delta\hat{x}(0) \rangle \quad (1.80)$$

fosse non negativo, è stata data da Caves in risposta a Yuen, il quale ha indicato [9] "stati contrattivi" per i quali il termine (1.80) è negativo. Nella rappresentazione della posizione tali stati hanno la forma

$$\langle x|\mu\nu a\omega\rangle = \left(\frac{C}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{C}{2}(1+2i\xi)(x-x_0)^2 + \frac{i}{\hbar}p_0(x-x_0)\right] \quad (1.81)$$

con

$$\begin{aligned}
|\mu|^2 - |\nu|^2 &= 1 ; & C &= \frac{m\omega}{\hbar|\mu - \nu|^2} ; \\
\xi = \text{Im}(\bar{\mu}\nu) &> 0 ; & a &= x_0 + ip_0 .
\end{aligned}
\tag{1.82}$$

Le funzioni d'onda (1.81) costituiscono una generalizzazione degli usuali pacchetti d'onda ad indeterminazione minima, con i quali esse coincidono per $\xi = 0$. In netto contrasto con questi ultimi, per ξ sufficientemente grande e a reale, si ottiene [10]

$$\Delta x(\tau)^2 \ll \frac{\hbar\tau}{2m} \ll \Delta x(0)^2 ,
\tag{1.83}$$

da cui il termine “stati contrattivi”.

Sebbene lo SQL sia effettivamente rispettato per il modello di von Neumann, la derivazione di Caves risulta ambigua in quanto sono stimate con σ tre differenti nozioni (nonostante queste assumano di fatto lo stesso valore nel modello di von Neumann), e cioè: l'incertezza del risultato, nel caso in cui la massa sia in un autostato di x all'istante della misura; la deviazione della posizione della massa dopo la misura dal risultato ottenuto; infine la risoluzione dell'apparato prima dell'interazione oggetto-probe.

La fondamentale distinzione tra precisione e risoluzione dovuta ad Ozawa ha permesso la deduzione rigorosa dello SQL, mettendo in luce l'ipotesi restrittiva (1.74). Per il teorema esposto, uno strumento di misura che superi lo SQL deve avere la risoluzione maggiore della precisione. Mentre le condizioni di compatibilità e di *unbiasedness* risultano estremamente ragionevoli

per una misura approssimata, non è affatto chiaro che ogni misura realizzabile debba soddisfare la relazione (1.74). Su questa considerazione si basa lo schema proposto da Ozawa [10] per la misura della posizione di una massa libera che viola il limite standard quantistico.

Ozawa ha analizzato [11] la seguente hamiltoniana d'interazione

$$\hat{H} = K \left[\alpha (\hat{x}\hat{p} - \hat{X}\hat{P}) + \beta \hat{X}\hat{p} + \gamma \hat{x}\hat{P} \right], \quad \alpha, \beta, \gamma \in R, \quad (1.84)$$

tra sistema e probe unidimensionali, caratterizzati rispettivamente dalle coppie di variabili coniugate (\hat{x}, \hat{p}) e (\hat{X}, \hat{P}) , nell'ipotesi di forte accoppiamento ($K \gg 1$) e breve durata ($\tau \ll 1$, $K\tau = 1$), così da potersi trascurare l'evoluzione dovuta alle hamiltoniane libere del sistema e del probe.

Determinate le soluzioni delle equazioni di Heisenberg del moto per \hat{x} e \hat{X} , le quali si scrivono

$$\begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{X}(t) \end{pmatrix} = \exp(Kt\underline{Z}) \begin{pmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{X}(0) \end{pmatrix}, \quad (1.85)$$

dove si è introdotta la matrice dei parametri

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (1.86)$$

Ozawa ha individuato un'intera classe di possibili misure di posizione caratterizzate da una precisione migliore di quella fornita dal modello standard di von Neumann, per il quale $\varepsilon = \sigma = \Delta x$ e $\alpha = \beta = 0$ nella (1.84). Nel caso particolare $\alpha = 1$, $\beta = -2$, e $\gamma = 2$, se lo stato di preparazione del probe è uno "stato contrattivo" (1.81), la massa libera dopo la prima misura con

risultato a si trova nello stato contrattivo $|\mu\nu a\omega\rangle$, indipendentemente dallo stato iniziale, e la precisione per ogni stato ψ precedente ogni successiva misura risulta $\varepsilon = 0$, cosicché, dalle (1.83) e (1.73) segue

$$\Delta[\tau, \hat{\rho}]^2 = \Delta x(\tau)[|\mu\nu a\omega\rangle]^2 \ll \frac{\hbar\tau}{2m}. \quad (1.87)$$

1.8 Principio di indeterminazione per misure congiunte

Come abbiamo affermato la nozione di POM permette di descrivere la misura simultanea di più osservabili, non necessariamente compatibili. Per la derivazione dello strumento e della relativa POM della misura, dovendosi applicare la formula statistica di Born, è necessario che le osservabili del probe misurate siano compatibili. Per la misura congiunta di due osservabili A_1 e A_2 del probe non compatibili si può pensare allo spazio di Hilbert \mathcal{K} come spazio tensore di spazi distinti \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_2 relativi a due probe, cosicché lo schema di misura possa scriversi

$$\Xi = [\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2, \hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2, \hat{U}, (\hat{A}_1 \otimes \hat{1}; \hat{1} \otimes \hat{A}_2)]. \quad (1.88)$$

Se X e Y sono due variabili di uscita designate a misurare i valori di due osservabili A e B del sistema S descritto da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , la POM congiunta M della coppia (X, Y) sarà una mappa $B(R^2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dagli insiemi boreliani di R^2 all'insieme degli operatori positivi su \mathcal{H} per la quale

$$P[X \in \Delta_1, Y \in \Delta_2 | \hat{\rho}] = \text{Tr}[\hat{M}(\Delta_1 \times \Delta_2)\hat{\rho}]. \quad (1.89)$$

Indicheremo con (M_1, M_2) la coppia di POM marginali di M ottenute dalle relazioni

$$\hat{M}_1(\Delta) = \hat{M}(\Delta \times R) \quad \hat{M}_2(\Delta) = \hat{M}(R \times \Delta) . \quad (1.90)$$

Chiameremo d'altra parte una coppia di POM (X, Y) coesistente se esiste una POM M di cui X e Y sono le marginali.

Il principio di indeterminazione è stato esteso da Holevo [12] per una coppia di POM (X, Y) con $\Delta X[\hat{\rho}], \Delta Y[\hat{\rho}] < \infty$, cosicché

$$\Delta X[\hat{\rho}] \Delta Y[\hat{\rho}] \geq \frac{1}{2} \left| \text{Tr}[[\hat{X}, \hat{Y}]\hat{\rho}] \right| . \quad (1.91)$$

Di qui e dalla (1.64) si mostrano [2] per una coppia coesistente di POM (X, Y) unbiased, rispettivamente A- e B-compatibili e con varianze finite le relazioni

$$\varepsilon_A[X \parallel \hat{\rho}] \varepsilon_B[Y \parallel \hat{\rho}] \geq \frac{1}{2} \left| \text{Tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right| \quad (1.92)$$

$$\Delta X[\hat{\rho}] \Delta Y[\hat{\rho}] \geq \left| \text{Tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right| . \quad (1.93)$$

La relazione (1.92) dà un limite inferiore generale per il prodotto delle precisioni per la misura congiunta di osservabili non commutanti. Questo risultato è utilizzato per ricavare la (1.93), la quale mostra come $\Delta X[\hat{\rho}]$ e $\Delta Y[\hat{\rho}]$ obbediscano ad una più stringente relazione di indeterminazione della relazione di Robertson-Holevo (1.91). Questo è dovuto al fatto che la (1.91) si riferisce all'accuratezza con cui uno stato quantistico può essere specificato, mentre la (1.93), trattandosi di POM marginali, si riferisce alla statistica di misure

simultanee su un insieme di sistemi identici. In quest'ultimo caso all'incertezza della specificazione dello stato iniziale si aggiunge l'inevitabile incertezza prodotta dalla misura che tenderebbe a forzare il sistema in un autostato comune degli operatori sotto osservazione, autostato che di fatto, per operatori non commutanti, non esiste.

1.9 Misure di Gordon-Louisell

Una misura di Gordon-Louisell, indicata con la scrittura $\{|\Psi_a\rangle\langle\Phi_a|\}$, è caratterizzata da una coppia di famiglie $\{\Psi_a\}$ e $\{\Phi_a\}$ di funzioni d'onda con parametro reale a che danno la seguente statistica

$$P(a|\psi) = |\langle\Phi_a|\psi\rangle|^2; \quad \psi \rightarrow \psi_a = \Psi_a \quad (1.94)$$

per ogni stato iniziale ψ .

Poiché la famiglia $\{\Phi_a\}$ determina la densità di probabilità si dovrà richiedere

$$\int da |\Phi_a\rangle\langle\Phi_a| = \hat{1}. \quad (1.95)$$

Mentre il vettore Φ_a può essere un vettore non normalizzabile (come l'autostato della posizione $|a\rangle$), i vettori della famiglia $\{\Psi_a\}$ sono invece assunti normalizzati, dovendo rappresentare gli stati fisici successivi alla misurazione. Lo strumento e la POM della misura di Gordon-Louisell si ricavano dalla statistica attraverso le relazioni (1.15) e (1.16)

$$\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} = \int_{\Delta} da |\Psi_a\rangle\langle\Phi_a| \hat{\rho} |\Phi_a\rangle\langle\Psi_a| \quad (1.96)$$

$$\hat{F}(\Delta) = \int_{\Delta} da |\Phi_a\rangle\langle\Phi_a|. \quad (1.97)$$

Si mostra facilmente che lo strumento \mathcal{I} nell'equazione (1.96) è completamente positivo, essendo

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \langle\xi_i|d\mathcal{I}(a)(|\eta_i\rangle\langle\eta_j|)|\xi_j\rangle &= da \sum_{i,j=1}^n \langle\xi_i|\Psi_a\rangle\langle\Phi_a|\eta_i\rangle\langle\eta_j|\Phi_a\rangle\langle\Psi_a|\xi_j\rangle = \\ &= da \left| \sum_{i=1}^n \langle\xi_i|\Psi_a\rangle\langle\Phi_a|\eta_i\rangle \right|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.98)$$

per ogni sequenza finita $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ e $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ di vettori di \mathcal{H} . Ogni misura di Gordon-Louisell, per la condizione necessaria e sufficiente di Ozawa, è quindi realizzabile.

Gordon e Louisell, i quali peraltro descrissero [13] questa misura senza utilizzare le nozioni di strumento e POM, definirono “misura ideale” una misura in cui lo stato finale Ψ_a dipende solo dal valore misurato a e non dallo stato iniziale ψ . Di qui si deduceva per l'operatore di sistema non hermitiano $\hat{\Omega}(a)$ della relazione (1.45) la forma di un operatore di proiezione generalizzato

$$\hat{\Omega}(a) = |\Psi_a\rangle\langle\Phi_a| \quad (1.99)$$

sullo stato finale Ψ_a . Nella nostra formulazione la proprietà di indipendenza dello stato finale dallo stato iniziale del sistema è trasferita agli stati posteriori, rappresentati, per come definiti nella (1.55), dalla famiglia $\{|\Psi_a\rangle\langle\Psi_a|\}$. Per questa caratteristica le misure di Gordon-Louisell sono estremamente indicate per descrivere misure esatte. Nel caso in cui i risultati siano distribuiti

entro un boreliano Δ , lo stato iniziale determina il peso dello stato posteriore Ψ_a attraverso la distribuzione di probabilità $\langle \Phi_a | \hat{\rho} | \Phi_a \rangle$ per ogni valore $a \in \Delta$.

Riferendoci ora alla relazione (1.45) è possibile trovare una condizione sufficiente perché uno schema di misura descritto da un operatore unitario \hat{U} per il sistema oggetto+probe dia luogo ad una misura di Gordon-Louisell. Riscrivendo la (1.99) per uno stato di preparazione del probe $|\varphi\rangle_P$

$$\hat{\Omega}(x) = {}_P\langle x | \hat{U} | \varphi \rangle_P = |\Psi_x\rangle \langle \Phi_x|, \quad (1.100)$$

segue dalla completezza di $\{|\Phi_x\rangle\}$

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(x) &= \int dy' \int dy'' |\Phi_{y'}\rangle \langle \Phi_{y''}| \{ {}_P\langle x | \otimes \langle \Phi_{y'} | \hat{U} | \varphi \rangle_P \otimes |\Phi_{y''}\rangle \} = \\ &= \int dy' u(x, y') |\Phi_{y'}\rangle \langle \Phi_x| = |\Psi_x\rangle \langle \Phi_x|. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Quindi la condizione richiesta è che esista un set completo $\{|\Phi_x\rangle\}$ tale che

$${}_P\langle x | \otimes \langle \Phi_{y'} | \hat{U} | \varphi \rangle_P \otimes |\Phi_{y''}\rangle = u(x, y') \delta(x - y''). \quad (1.102)$$

La funzione $u(x, y)$ rappresenta la sovrapposizione $\langle \Phi_y | \Psi_x \rangle$ e, per la condizione di normalizzazione degli stati $\{|\Psi_x\rangle\}$, dovrà soddisfare per ogni x la relazione

$$\|\Psi\|^2 = \int dy' \int dy'' \overline{u(x, y')} u(x, y'') \langle \Phi_{y'} | \Phi_{y''} \rangle = 1. \quad (1.103)$$

Per stati $\{|\Phi_x\rangle\}$ normalizzati con la funzione δ di Dirac la condizione (1.103) per $u(x, y)$ si riduce a

$$\int dy |u(x, y)|^2 = 1. \quad (1.104)$$

Osserviamo che lo schema suggerito da Ozawa per la misura della posizione di una massa libera che superi lo SQL descritto nel paragrafo 1.7 non è altro che la misura di Gordon-Louisell

$$\{|\mu\nu a \omega\rangle\langle a|\} \quad a \in R. \quad (1.105)$$

Capitolo 2

Misure ripetibili nello spazio delle fasi

La teoria generale della misurazione quantistica esposta nel primo capitolo viene qui applicata al fine di determinare il migliore schema di misura congiunta ripetibile di una coppia di quadrature coniugate di un singolo modo del campo di radiazione. Tale schema di misura generalizza a due gradi di libertà l'accoppiamento lineare di von Neumann per la misura della posizione, minimizzando il rumore aggiunto attraverso opportune operazioni di *squeezing* sugli stati di preparazione del probe. Si ricavano quindi la POM congiunta coerente, la quale fornisce per la distribuzione di probabilità la funzione di Husimi, e lo strumento di misura, il quale determina per lo stato di riduzione lo stato coerente relativo al risultato ottenuto dalla misura.

Segue l'analisi di POM e strumenti marginali relativi alle quadrature, all'intensità e alla fase. Per quanto concerne la misura della fase va sottolineata la necessità di ricorrere ad una misura indiretta congiunta, come conseguen-

za della mancanza di un operatore autoaggiunto che descriva la fase di un singolo modo del campo elettromagnetico. La POM marginale qui ottenuta è posta a confronto con la POM ideale fornita dalla teoria quantistica della stima.

2.1 Schema di misura

Sia \mathcal{H}_S uno spazio di Hilbert atto a descrivere il sistema Costituito da un singolo modo del campo elettromagnetico, e \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 gli spazi relativi a due probe. Per un operatore di distruzione bosonico a la componente quadratura del modo è definita come segue

$$\hat{X}_\phi = \frac{1}{2} (a^\dagger e^{i\phi} + a e^{-i\phi}) . \quad (2.1)$$

Indicheremo quindi con (\hat{X}, \hat{Y}) la coppia coniugata $(\hat{X}_0, \hat{X}_{\pi/2})$, cosicché

$$\hat{X} = \frac{1}{2} (a^\dagger + a) \quad \hat{Y} = \frac{i}{2} (a^\dagger - a) , \quad (2.2)$$

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \frac{i}{2} . \quad (2.3)$$

Ci proponiamo di determinare uno schema di misura congiunta (1.88) ideale della coppia di osservabili non commutanti (\hat{X}, \hat{Y}) attraverso la misura di due osservabili del probe, ad es. \hat{X}_1 e \hat{Y}_2 .

Consideriamo la seguente Hamiltoniana di interazione

$$\hat{H}_I = k_1 \hat{X} \hat{Y}_1 - k_2 \hat{Y} \hat{X}_2 , \quad (2.4)$$

suggerita dall'accoppiamento $\hat{x}\hat{P}$ del modello di von Neumann [4] per la misura della posizione, cosicché la Hamiltoniana totale \hat{H}_{TOT} per la durata dell'interazione possa scriversi

$$\hat{H}_{TOT} = \hat{H}_S + \hat{H}_P + K\hat{H}_I . \quad (2.5)$$

La costante di accoppiamento K è assunta così grande ($K \gg 1$) e la durata τ dell'accoppiamento così breve ($0 < \tau \ll 1$, $K\tau = 1$) che l'evoluzione dovuta alle Hamiltoniane libere del sistema e del probe possano essere trascurate.

L'operatore di evoluzione temporale \hat{U}_I relativo a \hat{H}_I sarà quindi

$$\hat{U}_I = \exp \left[-i \left(k_1 \hat{X} \hat{Y}_1 - k_2 \hat{Y} \hat{X}_2 \right) \right] \quad (\hbar = 1) . \quad (2.6)$$

Di qui l'evoluzione di Heisenberg per la coppia di osservabili dei probe misurate (\hat{X}_1, \hat{Y}_2) si scrive

$$\hat{U}^\dagger \hat{X}_1 \hat{U} = \hat{X}_1 + \frac{1}{2} k_1 \hat{X} - \frac{1}{8} k_1 k_2 \hat{X}_2 \quad (2.7)$$

$$\hat{U}^\dagger \hat{Y}_2 \hat{U} = \hat{Y}_2 + \frac{1}{2} k_2 \hat{Y} - \frac{1}{8} k_1 k_2 \hat{Y}_1 , \quad (2.8)$$

dove si è sfruttata l'identità

$$\begin{aligned} e^A X e^{-A} &= X + [A, X] + \frac{1}{2!} [A, [A, X]] + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} [A, [A, \dots, [A, X] \dots]] + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Richiedendo anzitutto che la misura indiretta di \hat{X} e \hat{Y} sia unbiased, vale a dire che i valori di aspettazione degli evoluti temporali di \hat{X}_1 e \hat{Y}_2 coincidano

rispettivamente con quelli delle osservabili di sistema \hat{X} e \hat{Y} , otteniamo la condizione $k_1 = k_2 = 2$, purché gli stati di preparazione dei probe annullino le quantità $\langle X_1 \rangle$ e $\langle Y_2 \rangle$. Quest'ultima restrizione, per la linearità in a e a^\dagger delle componenti quadratura, è banalmente soddisfatta ponendo entrambi i probe nello stato di vuoto

$$\hat{\rho}_P = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \equiv |0, 0\rangle\langle 0, 0|. \quad (2.10)$$

Essendo per lo stato di vuoto $\langle \Delta X_i^2 \rangle = \langle \Delta Y_i^2 \rangle = 1/4$ con $i = 1, 2$, la valutazione del rumore aggiunto dalla misura alla varianza $\langle \Delta X^2 \rangle$ (ed ugualmente a $\langle \Delta Y^2 \rangle$)

$$\langle \Delta X_1^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \Delta X_2^2 \rangle = \frac{5}{16} \quad (2.11)$$

suggerisce l'ulteriore trasformazione unitaria per le variabili di probe

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{X}_1 & ; & & \hat{X}_2 &\rightarrow \sqrt{2} \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_1 &\rightarrow \sqrt{2} \hat{Y}_1 & ; & & \hat{Y}_2 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{Y}_2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

la quale minimizza il rumore aggiunto al valore

$$\frac{1}{2} \left(\langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle \right) = \frac{1}{4}. \quad (2.13)$$

Come facilmente si verifica attraverso l'identità (2.9), la trasformazione unitaria (2.12) è realizzata dall'operatore

$$\hat{U}_{sq} = \exp \left[i \ln 2 \left(\hat{X}_1 \hat{Y}_1 - \hat{X}_2 \hat{Y}_2 \right) \right], \quad (2.14)$$

il quale può essere fattorizzato nel modo seguente

$$\begin{aligned}\hat{U}_{sq} &= \exp \left[\frac{i}{2} \ln 2 \left(\hat{X}_1 \hat{Y}_1 + \hat{Y}_1 \hat{X}_1 \right) \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \ln 2 \left(\hat{X}_2 \hat{Y}_2 + \hat{Y}_2 \hat{X}_2 \right) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{1}{4} \ln 2 \left(a_1^{\dagger 2} - a_1^2 \right) \right] \exp \left[\frac{1}{4} \ln 2 \left(a_2^{\dagger 2} - a_2^2 \right) \right] .\end{aligned}\quad (2.15)$$

\hat{U}_{sq} consiste quindi nel prodotto di due operatori del tipo

$$\hat{S}(\xi) = \exp \left[\frac{1}{2} (\xi a^{\dagger 2} - \bar{\xi} a^2) \right] , \quad (2.16)$$

agenti sui due probe. L'operatore (2.16) è detto operatore di *squeezing* e, applicato al vuoto, dà stati quantistici gaussiani con il minimo prodotto di incertezza ($= 1/4$, coincidente con quanto si ha per il vuoto) per una coppia coniugata di componenti quadratura $(\hat{X}_\phi, \hat{X}_{\phi+\pi/2})$, ovvero

$$\langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) \Delta X_\phi^2 \hat{S}(\xi) | 0 \rangle = \frac{s}{4} \quad \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) \Delta X_{\phi+\pi/2}^2 \hat{S}(\xi) | 0 \rangle = \frac{1}{4s} , \quad (2.17)$$

con coefficiente di *squeezing* s dato da $s = \exp(2|\xi|)$ e fase ϕ della coppia di quadrature privilegiata determinata da $\phi = [\arg(\xi)]/2$.

Pertanto \hat{U}_{sq} opera uno *squeezing* sui probe con coefficienti reciproci $s_1 = 1/2$ e $s_2 = 2$. Questo comporta una mirata compressione delle varianze relative alle quadrature dei probe (\hat{X}_1, \hat{Y}_2) sottoposte a misurazione.

In definitiva, lo schema di misura che abbiamo determinato è caratterizzato dalla quaterna

$$\Xi = [\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, |0, 0\rangle \langle 0, 0|, \hat{U}, (\hat{X}_1 \otimes \hat{1}; \hat{1} \otimes \hat{Y}_2)] , \quad (2.18)$$

con

$$\hat{U} = \hat{U}_I \hat{U}_{sq} = \exp \left[-2i \left(\hat{X} \hat{Y}_1 - \hat{Y} \hat{X}_2 \right) \right] \exp \left[i \ln 2 \left(\hat{X}_1 \hat{Y}_1 - \hat{X}_2 \hat{Y}_2 \right) \right] , \quad (2.19)$$

per il quale le (2.7) e (2.8) si riscrivono

$$\hat{U}^\dagger \hat{X}_1 \hat{U} = \hat{X} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X}_1 - \hat{X}_2) \quad (2.20)$$

$$\hat{U}^\dagger \hat{Y}_2 \hat{U} = \hat{Y} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2) . \quad (2.21)$$

Osserviamo che \hat{U}_{sq} agisce esclusivamente sui probe, prima dell'interazione \hat{U}_I , cosicch  uno schema con $\hat{U} = \hat{U}_I$ e $\hat{\rho}_P = \hat{U}_{sq} |0, 0\rangle \langle 0, 0| \hat{U}_{sq}^\dagger$   perfettamente equivalente e conduce alla medesima statistica.

2.2 POM congiunta coerente

Il calcolo della POM congiunta M della misura si ricava esplicitamente attraverso le relazioni (1.89) e (1.38), per le quali

$$\begin{aligned} P[x \in \Delta, y \in \Gamma | \hat{\rho}] &= \text{Tr}_S[\hat{M}(\Delta \times \Gamma) \hat{\rho}] = \\ &= \text{Tr}_{S,1,2}[\hat{1}_S \otimes \hat{X}(\Delta) \otimes \hat{Y}(\Gamma) |\hat{\rho} \otimes |0, 0\rangle \langle 0, 0| \hat{U}^\dagger] . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Utilizzando per i proiettori $\hat{X}(dx)$ e $\hat{Y}(dy)$ la distribuzione δ con il relativo sviluppo di Fourier

$$\begin{aligned} \hat{X}(dx) &= dx \delta(x - \hat{X}_1) = dx \int_R \frac{d\lambda}{2\pi} \exp [i\lambda(x - \hat{X}_1)] \\ \hat{Y}(dy) &= dy \delta(y - \hat{Y}_2) = dy \int_R \frac{d\mu}{2\pi} \exp [i\mu(y - \hat{Y}_2)] , \end{aligned} \quad (2.23)$$

e valutando l'evoluzione di Heisenberg di \hat{X}_1 e \hat{Y}_2 secondo le (2.20) e (2.21), abbiamo

$$\hat{m}(x, y) \equiv \frac{d\hat{M}(x, y)}{dx dy} = \text{Tr}_{1,2}[|0, 0\rangle \langle 0, 0| \hat{U}^\dagger \hat{X}(dx) \otimes \hat{Y}(dy) \hat{U}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \langle 0, 0 | \hat{U}^\dagger \delta(x - \hat{X}_1) \delta(y - \hat{Y}_2) \hat{U} | 0, 0 \rangle = \int_R \frac{d\lambda}{2\pi} \int_R \frac{d\mu}{2\pi} e^{i\lambda(x - \hat{X}) + i\mu(y - \hat{Y})} \times \\
&\times \langle 0, 0 | \exp \left[-i \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (\hat{X}_1 - \hat{X}_2) + i \frac{\mu}{\sqrt{2}} (\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2) \right] | 0, 0 \rangle . \quad (2.24)
\end{aligned}$$

L'elemento di matrice che compare nella (2.24) è facilmente valutabile introducendo l'operatore di spostamento

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a) , \quad (2.25)$$

il quale, applicato al vuoto, genera lo stato coerente $|\alpha\rangle$, autostato del distruttore a con autovalore α

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle \quad a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle . \quad (2.26)$$

Dalla overcompletezza degli stati coerenti

$$\int_C \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| , \quad (2.27)$$

dove $d^2\alpha \equiv d(\text{Re}\alpha) d(\text{Im}\alpha)$, e dalla rappresentazione della δ^2 di Dirac nel piano complesso

$$\delta^2(\alpha) = \int_C \frac{d^2\beta}{\pi^2} \exp(\bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}) \quad (2.28)$$

segue

$$\begin{aligned}
\hat{m}(x, y) &= \int_R \frac{d\lambda}{2\pi} \int_R \frac{d\mu}{2\pi} e^{i\lambda(x - \hat{X}) + i\mu(y - \hat{Y})} \left| \langle 0 | \hat{D}_1 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mu + i\lambda) \right) | 0 \rangle \right|^2 = \\
&= \int_R \frac{d\lambda}{2\pi} \int_R \frac{d\mu}{2\pi} \exp \left[i\lambda(x - \hat{X}) + i\mu(y - \hat{Y}) \right] e^{-\frac{1}{8}(\mu^2 + \lambda^2)} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Ponendo $\beta \doteq \frac{1}{2}(\mu - i\lambda)$ e $\alpha \doteq x + iy$, si ha in definitiva

$$\begin{aligned} \hat{m}(\alpha, \bar{\alpha}) &\equiv \frac{d\hat{M}(\alpha, \bar{\alpha})}{d^2\alpha} = \int_C \frac{d^2\beta}{\pi^2} \hat{D}(\beta) \exp\left(\bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha} - \frac{1}{2}|\beta|^2\right) = \\ &= \int_C \frac{d^2\beta}{\pi^2} : \hat{D}(\beta) : \exp\left(\bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}\right) = \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha|, \end{aligned} \quad (2.30)$$

dove $: \hat{D}(\beta) : = e^{-\bar{\beta}a} e^{\beta a^\dagger}$ indica l'operatore di spostamento scritto nell'ordinamento antinormale.

La POM M , come si verifica dalla (2.27), soddisfa alla condizione di completezza $\hat{M}(C) = \hat{1}$, ma non è una misura a valore di proiettori ortogonali, a causa della non ortogonalità degli stati coerenti

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \bar{\alpha}\beta\right). \quad (2.31)$$

La distribuzione di probabilità del risultato ($x = \text{Re}\alpha; y = \text{Im}\alpha$) per lo stato iniziale $\hat{\rho}$ si calcola facilmente attraverso l'operazione di traccia

$$P[x = \text{Re}\alpha; y = \text{Im}\alpha] = \text{Tr}[\hat{m}(\alpha, \bar{\alpha})\hat{\rho}] = \frac{1}{\pi} \langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle = Q(\alpha, \bar{\alpha}). \quad (2.32)$$

Si trova così una funzione di α e $\bar{\alpha}$ positiva e normalizzata, nota in ottica quantistica come funzione di Husimi o funzione Q . I momenti della funzione Q coincidono con la media di prodotti antinormalmente ordinati di operatori di creazione e distruzione, ovvero

$$\langle a^r a^{\dagger s} \rangle = \text{Tr}[a^r a^{\dagger s} \hat{\rho}] = \int_C d^2\alpha \alpha^r \bar{\alpha}^s Q(\alpha, \bar{\alpha}). \quad (2.33)$$

Calcoleremo ora la funzione Q per particolari stati iniziali.

- Stato coerente $\hat{\rho} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$.

Dal prodotto scalare (2.31) segue

$$Q_0(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \alpha_0 \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha - \alpha_0|^2). \quad (2.34)$$

La forma esponenziale di questa espressione mostra come $Q_0(\alpha, \bar{\alpha})$ sia significativamente diversa da zero se $\alpha \simeq \alpha_0$.

- Stato numero $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$.

Dallo sviluppo dello stato coerente sulla base numero

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.35)$$

segue

$$Q_n(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (2.36)$$

La funzione Q_n è indipendente dalla fase di α ed ha un massimo per $|\alpha|^2 = n$.

La media e la varianza di $|\alpha|^2$, calcolate attraverso la (2.33), risultano

$$\langle |\alpha|^2 \rangle = n + 1 \quad \text{var}\{|\alpha|^2\} = n + 1, \quad (2.37)$$

cosicché, per n sufficientemente grande, la distribuzione è fortemente piccata attorno ad $|\alpha|^2 = n$.

- Stato termico $\hat{\rho} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \exp[-\beta\hbar\omega a^\dagger a]$.

Si trova per Q_T una bigaussiana

$$Q_T(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}{\pi} \exp\{-|\alpha|^2 (1 - e^{-\beta\hbar\omega})\}, \quad (2.38)$$

con $\langle |\alpha|^2 \rangle = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-1}$. Osserviamo che nel limite $\beta \rightarrow \infty$ di temperatura nulla si ha $\langle |\alpha|^2 \rangle \rightarrow 1$. Questo è corretto, poiché $\langle |\alpha|^2 \rangle = \langle aa^\dagger \rangle$ e $\hat{\rho} \rightarrow |0\rangle\langle 0|$.

Ad elevate temperature ($\beta \rightarrow 0$) Q_T ricorda la distribuzione di Boltzmann

$$Q_T \rightarrow \frac{\beta \hbar \omega}{\pi} \exp\left(-\beta \hbar \omega |\alpha|^2\right). \quad (2.39)$$

2.3 Strumento e riduzione

Per determinare lo strumento che fornisce la $\hat{\rho}_\alpha$ ridotta del sistema dopo la misurazione consideriamo la (1.35) che, per questa misura, si specializza nel modo seguente

$$d\mathcal{I}(x, y) \hat{\rho} = \text{Tr}_{1,2}[\hat{X}_1(dx) \otimes \hat{Y}_2(dy) \hat{U}(\hat{\rho} \otimes |0, 0\rangle\langle 0, 0|) \hat{U}^\dagger]. \quad (2.40)$$

Il calcolo di questa traccia parziale è sostanzialmente diverso da quello operato per la determinazione della POM. In questo caso $\hat{\rho}$ non è isolabile e di conseguenza non è più sufficiente la conoscenza dell'evoluzione di Heisenberg di \hat{X}_1 e \hat{Y}_2 . Risulta invece necessaria la conoscenza di alcuni elementi di matrice dell'operatore \hat{U} sugli autostati degli osservabili di probe, come mostra la derivazione della (1.42). Scriveremo quindi in modo analogo

$$d\mathcal{I}(x_1, y_2) \hat{\rho} = dx_1 dy_2 \hat{\Omega}(x_1, y_2) \hat{\rho} \hat{\Omega}^\dagger(x_1, y_2), \quad (2.41)$$

con $\hat{\Omega}(x_1, y_2) = \langle x_1, y_2 | \hat{U} | 0, 0 \rangle$, in cui si è indicato con $|x_1, y_2\rangle$ il prodotto tensorizzato degli autostati di \hat{X}_1 e \hat{Y}_2 .

La valutazione di $\hat{\Omega}(x_1, y_2)$ segue dalla (2.19) e da un'opportuna relazione di completezza

$$\hat{\Omega}(x_1, y_2) = \int dy'_1 \int dx'_2 \langle x_1, y_2 | \hat{U}_I | y'_1, x'_2 \rangle \langle y'_1, x'_2 | \hat{U}_{sq} | 0, 0 \rangle. \quad (2.42)$$

Dalla formula di Baker-Hausdorff

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad (2.43)$$

valida per $[A, [A, B]]$ e $[B, [A, B]]$ c-numeri, e dal prodotto scalare tra auto-stati di quadrature coniugate

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(2ixy) , \quad (2.44)$$

si ottiene per l'ampiezza relativa ad \hat{U}_I

$$\begin{aligned} \langle x_1, y_2 | \hat{U}_I | y'_1, x'_2 \rangle &= \langle x_1 | y'_1 \rangle \langle y_2 | x'_2 \rangle \exp(-2iy_1 \hat{X} + 2ix'_2 \hat{Y} - ix'_2 y'_1) = \\ &= \frac{1}{\pi} \exp[2i(x_1 y'_1 - x'_2 y_2 - y'_1 \hat{X} + x'_2 \hat{Y})] . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ponendo quindi $\alpha = x_1 + iy_2$ e $\lambda = -(x'_2 + iy'_1)$, evidenziamo l'operatore di spostamento $\hat{D}(\lambda)$

$$\langle x_1, y_2 | \hat{U}_I | y'_1, x'_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \exp(\alpha \bar{\lambda} - \bar{\alpha} \lambda) \hat{D}(\lambda) . \quad (2.46)$$

L'ampiezza relativa alla parte di *squeezing* modifica la varianza della rappresentazione quadratura del vuoto

$$\langle x|0\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-x^2) \quad (2.47)$$

secondo le relazioni (2.17), cosicch 

$$\begin{aligned} \langle y'_1 x'_2 | \hat{U}_{sq} | 0, 0 \rangle &= \langle y'_1 | \hat{U}_{1/2} | 0 \rangle \langle x'_2 | \hat{U}_2 | 0 \rangle = \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}y'^2} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}x'^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} . \end{aligned} \quad (2.48)$$

In definitiva, dalle (2.46), (2.48) e analogamente all'equazione (2.30) otteniamo per $\hat{\Omega}(\alpha)$

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}(\alpha) &= \langle \text{Re}\alpha, \text{Im}\alpha | \hat{U} | 0, 0 \rangle = \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi\sqrt{\pi}} e^{\alpha\bar{\lambda} - \bar{\alpha}\lambda} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \hat{D}(\lambda) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\alpha\rangle\langle\alpha|.\end{aligned}\quad (2.49)$$

In accordo alla (1.44) è soddisfatta la relazione

$$d\hat{M}(\alpha, \bar{\alpha}) = d^2\alpha \hat{\Omega}^\dagger(\alpha) \hat{\Omega}(\alpha). \quad (2.50)$$

Lo strumento si scrive quindi

$$d\mathcal{I}(\alpha)\hat{\rho} = \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{\rho} |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.51)$$

e la riduzione, dalla (1.36), risulta

$$\hat{\rho}_\alpha = \frac{d\mathcal{I}(\alpha)\hat{\rho}}{\text{Tr}[d\mathcal{I}(\alpha)\hat{\rho}]} = |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (2.52)$$

Il risultato (2.52) è in accordo con quello ottenuto da Arthurs e Kelly [14] attraverso speciali proprietà delle funzioni d'onda gaussiane. Esso afferma che lo stato del sistema dopo la misura, indipendentemente dallo stato iniziale, si trova nello stato puro coerente relativo al risultato ottenuto, nello stato cioè più compatibile con l'informazione estratta dal processo di misura. Questa è una caratteristica delle misure ideali di Gordon-Louisell; la forma (2.49) dell'ampiezza $\hat{\Omega}(\alpha)$ conferma l'appartenenza della nostra misura a tale specie. Il risultato ottenuto non ha nulla di sorprendente. La misura congiunta di una coppia di osservabili coniugate è quanto di meglio descrive una

“misura classica”: lo stato coerente minimizza la relazione di incertezza di Heisenberg $\Delta x \Delta y = 1/4$, con energia media (privata dell’energia di punto zero) coincidente con l’energia classica dell’oscillatore armonico.

La fig. 2.1 mostra il risultato di misure congiunte ripetute. La struttura circolare è data dall’evoluzione libera dell’oscillatore armonico, per la quale

$$|\alpha\rangle_t = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \quad (2.53)$$

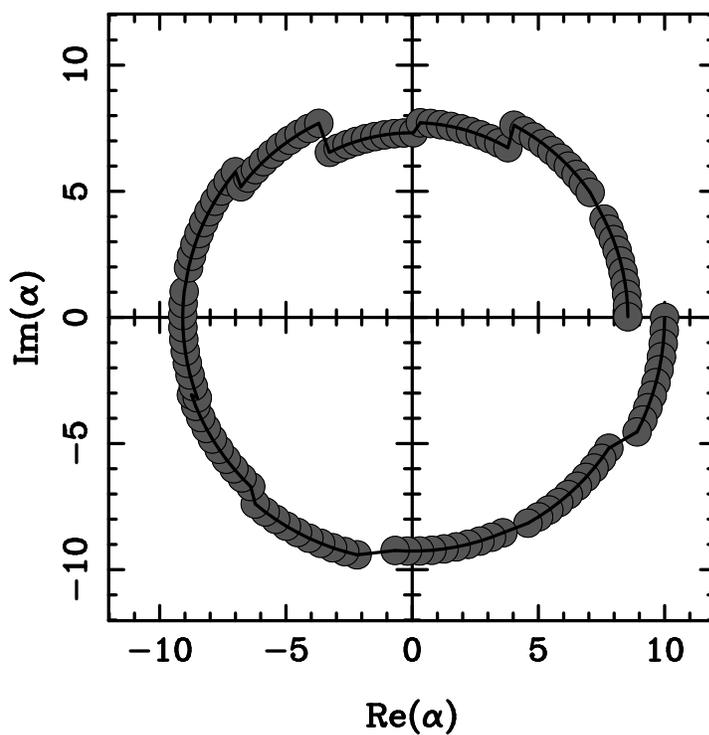


Figura 2.1: Misura congiunta ripetuta.

Dopo ogni misura con risultato α_i la distribuzione di probabilità per la misura successiva è data dalla funzione Q_{α_i} espressa nella (2.34), cioè da una gaussiana congiunta con $\Delta(\text{Re}\alpha_i)\Delta(\text{Im}\alpha_i) = 1/2$. Ad ogni misura l'incertezza inerente alla riproduzione del risultato precedente è esattamente il doppio della precisione massima con cui le relazioni di Heisenberg permettono di specificare uno stato quantistico. La successione di misure ha l'effetto di sovrapporre all'evoluzione libera una sorta di moto browniano che spinge il sistema ad esplorare lo spazio delle fasi.

2.4 Osservabili nello spazio delle fasi

Il fatto che si possa definire una funzione densità di probabilità congiunta per la misura di osservabili coniugate comporta che il concetto di spazio delle fasi è trasferibile nella meccanica quantistica, con la specificazione che un punto dello spazio rappresenta il risultato di una misura.

Considerata una funzione reale $w = f(\alpha, \bar{\alpha})$ possiamo formalmente scrivere per lo strumento \mathcal{I}_f corrispondente all'osservabile f

$$d\mathcal{I}_f(w)\hat{\rho} = dw \int_C \frac{d^2\alpha}{\pi} \delta(w - f(\alpha, \bar{\alpha})) |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{\rho} |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.54)$$

cosicché

$$\hat{\rho}_w = \frac{d\mathcal{I}_f(w)\hat{\rho}}{\text{Tr}[d\mathcal{I}_f(w)\hat{\rho}]}. \quad (2.55)$$

Analogamente scriveremo per la POM μ_f

$$d\hat{\mu}_f(w) = dw \int_C \frac{d^2\alpha}{\pi} \delta(w - f(\alpha, \bar{\alpha})) |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (2.56)$$

In particolare, rappresentando il piano complesso attraverso le coordinate cartesiane (x, y) o la decomposizione polare (r, ϕ) , si ottengono due insiemi di coppie di POM marginali riferite rispettivamente alle componenti in quadratura del campo e alla coppia numero-fase.

Ci si potrebbe chiedere quale senso abbia investigare sulla distribuzione di probabilità marginale di un'osservabile desunta da una misura congiunta, dal momento che una singola misura ideale non è sottoposta alla versione più stringente delle relazioni di Heisenberg. La misura esatta di un'osservabile lascia di principio i valori dell'osservabile coniugata del tutto indeterminati. Una misura esatta della posizione lascerebbe i valori del momento ugualmente probabili, così come una misura esatta del momento lascerebbe i valori della posizione. Nessuna di queste condizioni è fisicamente realistica, la prima per le limitazioni dell'energia, la seconda per il confinamento spaziale. Quando, ad esempio, si misura il momento di una particella si sa che questa si trova nelle vicinanze dell'apparato di misura. Viceversa, per una misura della posizione si sa che la particella non può avere energia infinita, ma di fatto compresa nell'intervallo di risposta caratteristico del rivelatore. L'approccio più vicino alla misura singola sarebbe pertanto una misura congiunta in cui, attraverso opportuni coefficienti di *squeezing*, una variabile è misurata molto precisamente, mentre la variabile coniugata è determinata con minore accuratezza.

In secondo luogo, per la determinazione di particolari grandezze del sistema,

la misura congiunta rappresenta una possibile alternativa a diverse misure singole effettuate su più parti di un campione statistico. Consideriamo infatti la funzione di Wigner

$$W(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{1}{\pi^2} \int_C d^2\lambda \exp(\alpha\bar{\lambda} - \bar{\alpha}\lambda) \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{D}(\lambda)] , \quad (2.57)$$

la quale, in modo analogo alla funzione Q per prodotti antinormalmente ordinati, ha i momenti uguali alla media di prodotti simmetrizzati (prodotti mediati su tutti i possibili ordinamenti), ossia

$$\langle \{a^r a^{\dagger s}\}_{sim} \rangle = \int_C d^2\alpha \alpha^r \bar{\alpha}^s W(\alpha, \bar{\alpha}) . \quad (2.58)$$

La funzione di Wigner esiste per ogni matrice densità e, pur non essendo definita positiva, ha distribuzioni marginali definite positive e in accordo con le distribuzioni di probabilità per la misura singola delle componenti in quadratura, ovvero

$$\begin{aligned} \int_R dy W(x, y) &= {}_0\langle x|\hat{\rho}|x\rangle_0 , \\ \int_R dx W(x, y) &= {}_{\pi/2}\langle y|\hat{\rho}|y\rangle_{\pi/2} , \end{aligned} \quad (2.59)$$

dove si è posto $\alpha = x + iy$ e si sono introdotti gli autostati delle quadrature. Considerato ora un insieme di sistemi identici e misurate su due parti di esso rispettivamente due quadrature coniugate, otteniamo le due distribuzioni di probabilità (2.59), per le quali $\Delta x \Delta y \geq 1/4$. Con queste distribuzioni si possono calcolare i valori di aspettazione di qualunque potenza di x o di y , ma non di potenze miste, in quanto non è possibile da esse risalire alla funzione sul piano complesso (2.57).

La misura congiunta dà direttamente una distribuzione bidimensionale che, per probe con bilanciati *squeezing* reciproci, corrisponde alla funzione Q . Si ottengono in questo caso informazioni sulla correlazione delle variabili e sull'orientazione angolare delle distribuzioni, a scapito di avere per le distribuzioni di probabilità marginali la condizione più stringente $\Delta x \Delta y \geq 1/2$.

Infine, per quanto concerne la misura della fase alla quale siamo maggiormente interessati nell'ambito dell'ottica quantistica, occorre ricordare che non esiste un operatore autoaggiunto che descriva la fase di un singolo modo del campo elettromagnetico. All'usuale fattorizzazione dell'ampiezza complessa di un'onda piana classica in ampiezza reale e fattore di fase non corrisponde in meccanica quantistica una analoga decomposizione polare dell'operatore di distruzione bosonico in operatori di ampiezza e fase entrambi autoaggiunti. Questo fatto è principalmente dovuto alla semilimitatezza dello spettro dell'operatore numero [15, 16], il quale è canonicamente coniugato alla fase attraverso la trasformata di Fourier [17]. La POM congiunta coerente che abbiamo ricavato, dalla quale deriveremo la POM marginale per la fase, è la stessa che si ottiene attraverso la rivelazione con doppia omodina [18]. Lo schema di misura presentato ha il vantaggio di non assorbire la radiazione, permettendo quindi la ripetibilità della misura.

Il concetto di strumento marginale è estremamente sottile ed approda al problema dell'interpretazione della meccanica quantistica. L'evoluzione uni-

taria che descrive l'interazione tra il sistema e i probe è indipendente dall'informazione che estraiamo dalla successiva misura sui probe. D'altra parte, per quanto esposto nel primo capitolo, non sussiste alcuna relazione di causalità tra il risultato della misura e lo stato finale del sistema, bensì una correlazione statistica. Lo stato di riduzione calcolato dallo strumento marginale attraverso la relazione (2.55) concerne l'asserzione statistica che facciamo riguardo al sistema in base al contenuto di informazione estratto dal processo di misura.

2.5 Strumenti e POM marginali

- Quadratura \hat{X} .

Lo stato di riduzione del sistema dopo una misura con risultato x della quadratura \hat{X} è formulata attraverso lo strumento \mathcal{I}_X , calcolato secondo la (2.54) con $f(\alpha, \bar{\alpha}) = \text{Im}\alpha$. Ponendo $\alpha = x + iy$ ed evidenziando gli operatori di spostamento antinormalmente ordinati la (2.54) si riscrive

$$\begin{aligned}
d\mathcal{I}_X(x)\hat{\rho} &= dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\text{Im}\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{\rho} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \\
&= dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi} \int_C \frac{d^2\mu}{\pi} \int_C \frac{d^2\nu}{\pi} e^{2iy\text{Re}(\mu+\nu) - 2ix\text{Im}(\mu+\nu)} \times \\
&\times : \hat{D}(\mu) : \hat{\rho} : \hat{D}(\nu) : .
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Essendo per $r, t \in R$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\pi} e^{2ixt} : \hat{D}(r - it) : = e^{-\frac{r^2}{2}} \hat{D}(r) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\pi} e^{-2it(\hat{X} - x + \frac{r}{2})} e^{-\frac{t^2}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{r^2}{2}} \hat{D}(r) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(\hat{X}-x+\frac{r}{2})^2} \doteq e^{-\frac{r^2}{2}} \hat{D}(r) \hat{A}\left(x - \frac{r}{2}\right), \quad (2.61)$$

dove si è definito nell'ultimo passaggio

$$\hat{A}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp[-2(\hat{X} - x)^2], \quad (2.62)$$

si ottiene dalla (2.60)

$$d\mathcal{I}_X(x)\hat{\rho} = dx \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-r^2} \hat{D}(r) \hat{A}\left(x - \frac{r}{2}\right) \hat{\rho} \hat{A}\left(x - \frac{r}{2}\right) \hat{D}^\dagger(r). \quad (2.63)$$

La POM μ_X per la (1.44) si scrive

$$d\hat{\mu}_X(x) = dx \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-r^2} \left[\hat{A}\left(x - \frac{r}{2}\right) \right]^2 = dx \hat{A}(x), \quad (2.64)$$

cosicché la distribuzione di probabilità per x risulta

$$\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-2(x'-x)^2} \langle x' | \hat{\rho} | x' \rangle, \quad (2.65)$$

ovvero la convoluzione della distribuzione per la misura singola con una gaussiana con varianza $\sigma^2 = 1/4$. È interessante calcolare lo stato di riduzione conseguente al risultato x della misura di \hat{X} per uno stato iniziale $\hat{\rho} = |\bar{x}\rangle\langle\bar{x}|$ autostato della quadratura. Si ottiene in questo caso il pacchetto gaussiano

$$\hat{\rho}_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp[-2(\hat{X} - x)^2] \quad (2.66)$$

centrato attorno al valore x ottenuto dalla misurazione.

Possiamo dare un'espressione analitica che descriva la modificazione della funzione di Wigner (2.57) in seguito alla misura della quadratura (attraverso misura congiunta). A questo scopo si deve determinare

$$W_{x'}(\alpha, \bar{\alpha}) = \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi^2} e^{\alpha\bar{\lambda} - \bar{\alpha}\lambda} \text{Tr}[d\mathcal{I}_X(x')\hat{\rho}\hat{D}(\lambda)] \text{Tr}[d\mathcal{I}_X(x')\hat{\rho}]^{-1}. \quad (2.67)$$

Calcolando la traccia nella (2.57) attraverso gli autostati delle quadrature, ponendo $\alpha \doteq x + iy$ ed integrando in $d\text{Re}\lambda$, si ricavano le relazioni

$$W(x, y) = \int_R \frac{dh}{2\pi} \exp(2iyh) \langle x - \frac{h}{2} | \hat{\rho} | x + \frac{h}{2} \rangle, \quad (2.68)$$

$$\langle x - \frac{h}{2} | \hat{\rho} | x + \frac{h}{2} \rangle = \int_R dy' \exp(-2iy'h) W(x, y'), \quad (2.69)$$

per le quali, attraverso semplici integrazioni, la (2.67) si riscrive

$$W_{x'}(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-2(x-x')^2} \frac{\int dr \int ds e^{-2r^2-s^2} W(x' - r, y + s)}{\int d\bar{x} \int d\bar{y} e^{-2(\bar{x}-x')^2} W(\bar{x}, \bar{y})}. \quad (2.70)$$

Il nostro schema fornisce una misura 1/2-approssimata di \hat{X} . Dalla definizione (1.59) risulta infatti

$$\int \int_{R^2} (a - x)^2 \text{Tr} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(\hat{X}-a)^2} |x\rangle \langle x| \hat{\rho} \right] dx da = \frac{1}{4}. \quad (2.71)$$

Ottenendosi analoghi risultati per la quadratura \hat{Y} , segue

$$\varepsilon_X(A_X \| \hat{\rho}) \varepsilon_Y(A_Y \| \hat{\rho}) = \frac{1}{4}. \quad (2.72)$$

La relazione (1.92) è quindi soddisfatta $\forall \hat{\rho}$ con il segno di uguaglianza, a conferma del fatto che si è determinato il migliore schema di misura congiunta di una coppia di quadrature coniugate.

Consideriamo ora gli stati di probe

$$|\psi\rangle_1 = \left(\frac{2}{\pi \varepsilon_1^2} \right)^{1/4} \int dx \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon_1^2}\right) |x\rangle_1 \quad (2.73)$$

$$|\varphi\rangle_2 = \left(\frac{2}{\pi\varepsilon_2^2}\right)^{1/4} \int dy \exp\left(-\frac{y^2}{\varepsilon_2^2}\right) |y\rangle_2, \quad (2.74)$$

i quali coincidono per $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ con lo stato di vuoto in rappresentazione delle quadrature rispettivamente \hat{X}_1 e \hat{Y}_2 , e più genericamente rappresentano stati di vuoto *squeezed*. La POM marginale per la quadratura \hat{X} fornita dallo schema di misura con lo stesso operatore unitario (2.19) ma con stati di preparazione di probe (2.73) e (2.74) risulta

$$d\hat{\mu}'_X(x) = dx \sqrt{\frac{4\varepsilon_2^2}{\pi(1+\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2)}} \exp\left[-\frac{4\varepsilon_2^2}{\pi(1+\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2)} (\hat{X} - x)^2\right]. \quad (2.75)$$

Osserviamo che nei limiti $\varepsilon_2^2 \rightarrow \infty$, $\varepsilon_1^2 \rightarrow 0$ con $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \text{cost}$ si ottiene

$$d\hat{\mu}'_X(x) = dx \delta(x - \hat{X}). \quad (2.76)$$

Ciò significa che mentre lo stato di probe $|\psi\rangle_1$ in seguito ad un elevato *squeezing* approssima un autostato della quadratura \hat{X}_1 , la POM marginale viene a coincidere con la misura spettrale di \hat{X} , fornendo quindi una distribuzione di probabilità equivalente a quella che si otterrebbe da una misura diretta di \hat{X} . Corrispondentemente la forma gaussiana della POM marginale per la quadratura coniugata \hat{Y} si allarga fino a dare una distribuzione di probabilità uniforme.

- Intensità $\hat{n} = a^\dagger a$.

Ponendo nella (2.54) $f(\alpha, \bar{\alpha}) = |\alpha|^2$ si ottiene

$$d\mathcal{I}_{\hat{n}}(h)\hat{\rho} = dh \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} |\sqrt{h}e^{i\varphi}\rangle \langle \sqrt{h}e^{i\varphi}| \hat{\rho} |\sqrt{h}e^{i\varphi}\rangle \langle \sqrt{h}e^{i\varphi}|. \quad (2.77)$$

Dall'identità

$$\delta_{2\pi}(\varphi - \psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\varphi-\psi)} \quad (2.78)$$

e dallo sviluppo dello stato coerente $|\sqrt{h}e^{i\varphi}\rangle$ sulla base numero segue

$$d\mathcal{I}_{\hat{n}}(h)\hat{\rho} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{\Omega}_m(h)\hat{\rho}\hat{\Omega}_m^\dagger(h)dh, \quad (2.79)$$

in cui

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_m(h) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} |\sqrt{h}e^{i\varphi}\rangle \langle \sqrt{h}e^{i\varphi}| e^{im\varphi} = \\ &= e^{-h} h^{m/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{\sqrt{n!(n+m)!}} |n\rangle \langle n+m|. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Osserviamo che la relazione $\hat{\Omega}_m(h) = \hat{\Omega}_{-m}^\dagger(h)$ permette di dare significato all'espressione (2.80) per i valori negativi di m .

La POM $\mu_{\hat{n}}$ si scrive

$$d\hat{\mu}_{\hat{n}}(h) = dh \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} |\sqrt{h}e^{i\varphi}\rangle \langle \sqrt{h}e^{i\varphi}| = dh \hat{\Omega}_0(h) = dh e^{-h} \frac{h^{a^\dagger a}}{(a^\dagger a)!} \quad (2.81)$$

La precisione della misura si calcola agevolmente utilizzando per la POM relativa alla singola misura ideale il proiettore sullo stato numero

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\hat{n}}(\mu_{\hat{n}}||\hat{\rho})^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dh (h-n)^2 \text{Tr} \left[e^{-h} \frac{h^{a^\dagger a}}{(a^\dagger a)!} |n\rangle \langle n| \hat{\rho} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle n| \hat{\rho} |n\rangle (n+2) = \bar{n} + 2, \end{aligned} \quad (2.82)$$

dove \bar{n} indica il numero medio di fotoni dello stato iniziale

$$\bar{n} = \text{Tr}[a^\dagger a \hat{\rho}]. \quad (2.83)$$

Osserviamo che la POM marginale dell'intensità (2.81) non è *unbiased* in quanto

$$\hat{\mu} = \int_0^{+\infty} h d\hat{\mu}_{\hat{n}}(h) = \hat{n} + 1 \neq \hat{n} . \quad (2.84)$$

Questa considerazione deriva dal fatto che la misura congiunta fornisce una distribuzione di punti nel piano complesso in accordo (con i medesimi momenti) con la funzione Q. Se da tale distribuzione si vuole stimare la media di $|\alpha|^2$, secondo la (2.33) questo equivale a calcolare il valore d'aspettazione quantistico dell'operatore antinormalmente ordinato aa^\dagger , il quale corrisponde all'operatore $\hat{\mu}$ costruito con la POM marginale secondo la (2.84).

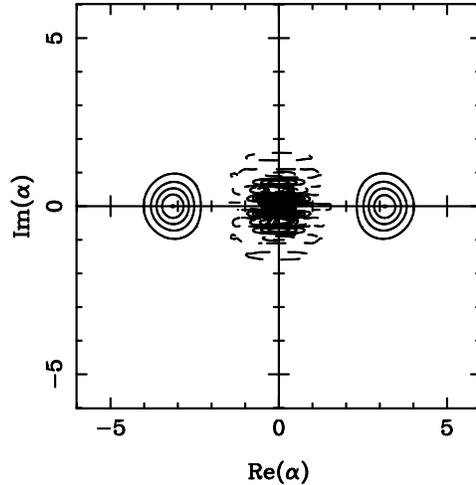


Figura 2.2: Funzione di Wigner per un “gatto di Schrödinger” con $\alpha=3$.

Essendo $\Delta_{\mu_{\hat{n}}}(h)[\hat{\rho}]^2 = \Delta n^2 + \bar{n} + 1$ e $\Delta \hat{\mu}^2 = \Delta n^2$, risulta verificata la relazione (1.65). A differenza del risultato ottenuto per la quadratura, la precisione

della misura dell'intensità dipende dallo stato iniziale $\hat{\rho}$, il quale determina il valore di \bar{n} . Quanto più lo stato è eccitato, tanto più la misura si fa imprecisa.

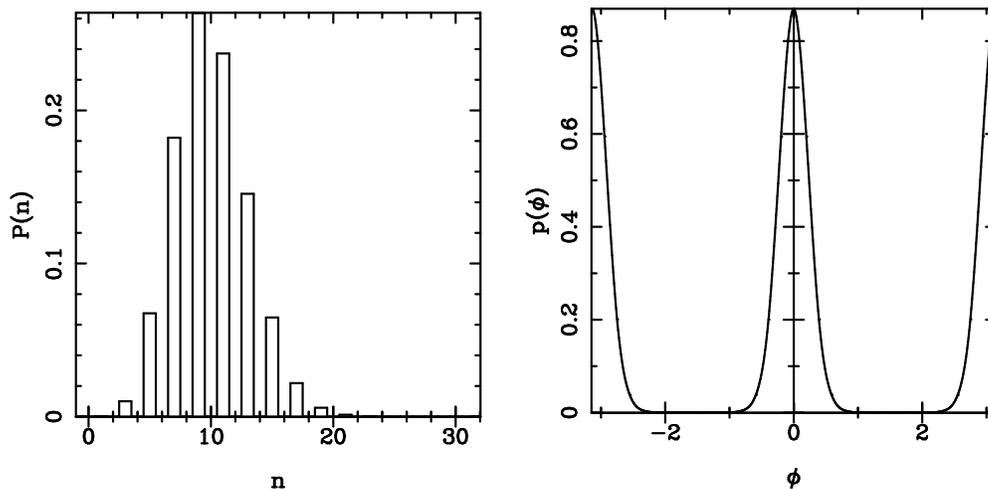


Figura 2.3: Distribuzioni del numero e della fase.

La fig. 2.2 rappresenta la funzione di Wigner per un “gatto di Schrödinger ottico”, ovvero una sovrapposizione di due stati coerenti $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$. Le distribuzioni di numero e fase di tale stato sono rappresentate nelle fig. 2.3. Funzioni di Wigner oscillanti contraddistinguono stati fortemente non classici, come quello considerato. Le fig 2.4 mostrano la funzione di Wigner e la distribuzione del numero per lo stato di riduzione successivo alla misura dell'intensità. Lo stato di sovrapposizione è distrutto dalla misura (non sono più presenti oscillazioni) e lo stato di riduzione è una miscela, come rivela il calcolo numerico del *mixing* $m \simeq 0.73$.

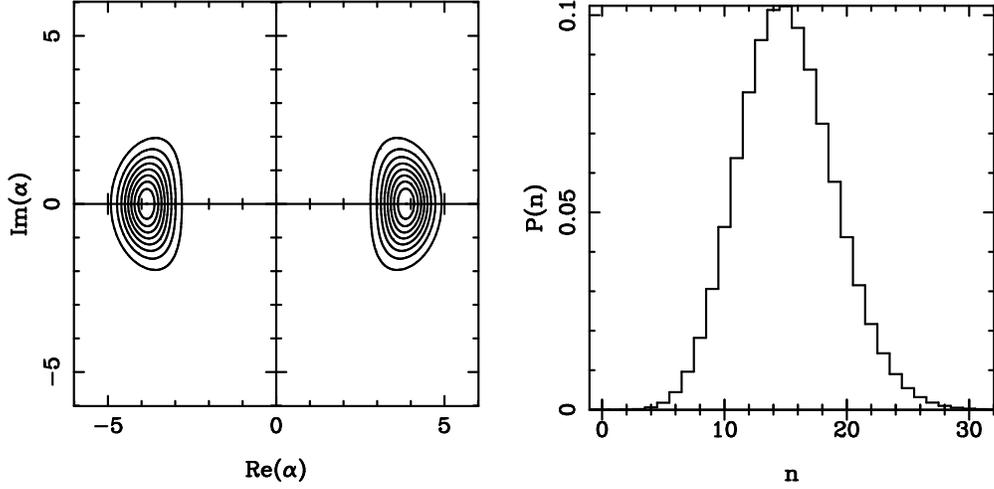


Figura 2.4: Funzione di Wigner e distribuzione del numero in seguito alla misura dell'intensità .

- Fase Φ .

Abbiamo accennato alla mancanza di un operatore autoaggiunto per la fase di un singolo modo del campo di radiazione. La formulazione di Ozawa permette comunque di descrivere la riduzione e la distribuzione di probabilità relative a una misura di fase condotta attraverso una misura congiunta ponendo semplicemente nelle equazioni (2.54) e (2.56) $f(\alpha, \bar{\alpha}) = \arg \alpha$. Si ottengono in questo modo

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{I}_{\Phi}(\varphi)\hat{\rho} &= \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{+\infty} dh |\sqrt{h}e^{i\varphi}\rangle \langle \sqrt{h}e^{i\varphi}| \hat{\rho} |\sqrt{h}e^{i\varphi}\rangle \langle \sqrt{h}e^{i\varphi}| = \\
 &= \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_{n,m,l,k} e^{i(n-m+l-k)\varphi} |n\rangle \langle k| \rho_{ml} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m+l+k)+1\right]}{\sqrt{n!m!l!k!} 2^{(n+m+l+k)}}, \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d\hat{\mu}_{\Phi}(\varphi) &= \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{+\infty} dh |\sqrt{h}e^{i\varphi}\rangle \langle \sqrt{h}e^{i\varphi}| = \\
&= \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_{n,m} e^{i(n-m)\varphi} |n\rangle \langle m| \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m)+1\right]}{\sqrt{n!m!}}, \quad (2.86)
\end{aligned}$$

nelle quali, sviluppando sulla base numero, si è introdotta la funzione Γ di Eulero. La precisione definita nella (1.59) risulta inadeguata per stimare l'incertezza della misura della fase, non avendo a disposizione un set di proiettori ortogonali relativi ad un operatore autoaggiunto che descriva la fase coi quali confrontare la POM ottenuta. Possiamo ovviare a questo fatto utilizzando la POM ideale fornita dalla teoria quantistica della stima [19]

$$d\hat{\mu}_{SG}(\varphi) = \frac{d\varphi}{2\pi} |e^{i\varphi}\rangle \langle e^{i\varphi}|, \quad (2.87)$$

in cui $|e^{i\varphi}\rangle$ sono gli stati non normalizzabili di Susskind-Glogower

$$|e^{i\varphi}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\varphi n} |n\rangle. \quad (2.88)$$

Ricordiamo che non si è ancora trovato uno schema di misura realizzabile che neppure approssimi tale misura ideale. Dal confronto della POM (2.86) con la POM ideale sviluppata sulla base numero

$$d\hat{\mu}_{SG}(\varphi) = \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_{n,m} e^{i(n-m)\varphi} |n\rangle \langle m|, \quad (2.89)$$

è evidente che l'inevitabile rumore aggiunto della misura congiunta è dettato dal coefficiente

$$\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m)+1\right]}{\sqrt{n!m!}}. \quad (2.90)$$

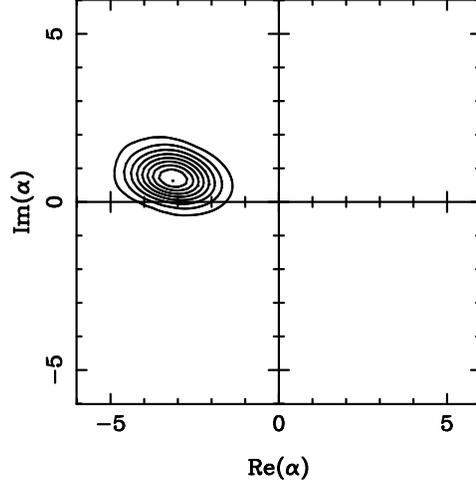


Figura 2.5: Funzione di Wigner in seguito alla misura della fase.

La limitatezza degli intervalli di integrazione nella relazione (1.59) che definisce la precisione fa dipendere il risultato dalla finestra di ampiezza 2π prescelta, sovrastimando inoltre i contributi dei termini con $|\varphi - \varphi'| \simeq 2\pi$. Tuttavia, per stati $\hat{\rho}$ con indeterminazione di fase sufficientemente contenuta, la precisione della misura può essere valutata univocamente dall'integrale

$$\varepsilon(\hat{\mu}_\Phi \|\hat{\rho})^2 = \iint |e^{i\varphi} - e^{i\varphi'}|^2 \text{Tr}[d\hat{\mu}_\Phi(\varphi) d\hat{\mu}_{SG}(\varphi') \hat{\rho}] , \quad (2.91)$$

indipendentemente dalla finestra prescelta. Sviluppando la traccia ed integrando si ottiene dalla (2.91) la relazione

$$\varepsilon(\hat{\mu}_\Phi \|\hat{\rho})^2 = 2 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{n!(n+1)!}} (\rho_{n,n} + \rho_{n+1,n+1}) , \quad (2.92)$$

la quale, per l'identità

$$\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\sqrt{n!}} = \binom{n + \alpha}{n} \Gamma(\alpha + 1) = (-)^n \binom{-\alpha - 1}{n} \Gamma(\alpha + 1) \quad (2.93)$$

valida $\forall \alpha \in R$, può scriversi nella forma compatta

$$\begin{aligned} \varepsilon(\hat{\mu}_\Phi \|\hat{\rho})^2 &= 2 + \sqrt{\pi} \rho_{0,0} + \\ &- \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\langle (-)^{a^\dagger a} \binom{-\frac{3}{2}}{a^\dagger a} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} + \frac{\sqrt{a^\dagger a}}{a^\dagger a + \frac{1}{2}} \right\} \right\rangle, \quad (2.94) \end{aligned}$$

dove $\langle \rangle$ indica il valore di aspettazione e $\rho_{0,0}$ l'elemento di matrice diagonale relativo al vuoto.

Nella fig. 2.5 è rappresentata la funzione di Wigner relativa allo stato di riduzione del “gatto di Schrödinger” in seguito alla misura della fase.

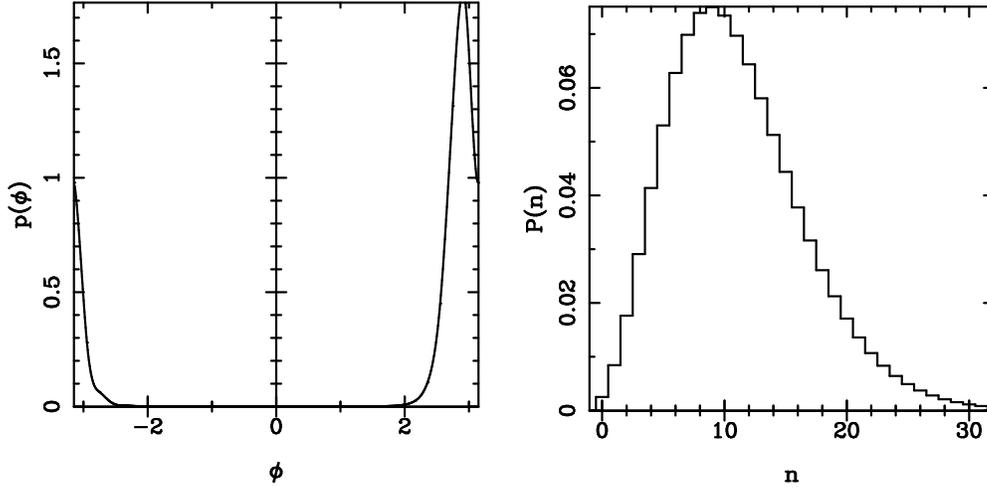


Figura 2.6: Distribuzioni della fase e del numero in seguito alla misura della fase.

Analogamente alla misura dell'intensità la sovrapposizione viene distrutta ed il *mixing* per lo stato ridotto risulta $m \simeq 0.41$. La fig. 2.6 mostra le distribuzioni di probabilità della fase e del numero per lo stato di riduzione.

Capitolo 3

Misura di fase del campo a due modi

In questo capitolo viene presentato uno schema sperimentale per la misura ideale della fase di un campo a due modi. Lo stato del campo è ottenuto per mezzo di un amplificatore “phase insensitive” (PIA) ad elevato guadagno, seguito da un *beam-splitter* ad alta trasmissività con un forte oscillatore locale coerente alla frequenza di uno dei due modi. Per numero complessivo di fotoni \bar{n} infinito il campo approssima gli autostati non normalizzabili dell’operatore non hermitiano $\hat{Z} = a + b^\dagger$, corrispondente alla fotocorrente complessa misurata da un rivelatore eterodina di efficienza quantica unitaria. Si ricava quindi la distribuzione di probabilità della fotocorrente, e di qui, attraverso l’integrazione sull’intensità, la distribuzione marginale della fase, la quale approssima una forma gaussiana che fornisce, in seguito ad una opportuna ottimizzazione, la sensibilità ideale $\delta\phi = 1/\bar{n}$.

Diversamente dal caso della misura di fase di un singolo modo del campo,

questo risultato è reso possibile dal fatto che l'operatore di fase relativo a due modi risulta ben definito, autoaggiunto e canonicamente coniugato all'operatore differenza dei numeri di fotoni dei due modi, caratterizzato da uno spettro discreto non limitato.

Determinata la POM del rivelatore eterodina con efficienza quantica $\eta < 1$, vengono discussi i limiti di validità per la sensitività ideale, pervenendo allo stringente requisito tecnico $1 - \eta \ll 2/\bar{n}$.

Il capitolo si conclude suggerendo una tecnica sperimentale in grado di realizzare una hamiltoniana d'interazione a quattro modi, la quale consente la ripetibilità della misura eterodina.

3.1 Autostati di $a + b^\dagger$

Consideriamo l'operatore non hermitiano $\hat{Z} = a + b^\dagger$ sullo spazio di Hilbert a due modi $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$, dove a e b sono due operatori di distruzione bosonici. Introducendo le coppie di quadrature coniugate dei modi a e b definite secondo la relazione (2.1), possiamo scrivere

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + i\hat{Z}_2, \quad (3.1)$$

dove \hat{Z}_1 e \hat{Z}_2 sono gli operatori autoaggiunti

$$\hat{Z}_1 = a_0 + b_0 \quad \hat{Z}_2 = a_{\pi/2} - b_{\pi/2}. \quad (3.2)$$

Essendo

$$[\hat{Z}, \hat{Z}^\dagger] = [\hat{Z}, \hat{Z}_i] = [\hat{Z}^\dagger, \hat{Z}_i] = [\hat{Z}_i, \hat{Z}_j] = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (3.3)$$

esiste un sistema ortonormale completo di autovettori simultanei di \hat{Z}_1 e \hat{Z}_2 , e quindi di \hat{Z} .

Si verifica facilmente che il vettore [20]

$$\begin{aligned} |z\rangle\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} \exp(2ix\text{Im}z) |x\rangle_0 \otimes |\text{Re}z - x\rangle_0 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} \exp(-2iy\text{Re}z) |y + \text{Im}z\rangle_{\pi/2} \otimes |y\rangle_{\pi/2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

è un autostato di \hat{Z} con autovalore complesso z . Il set $\{|z\rangle\rangle\}$ è una base per \mathcal{H} con spettro continuo bidimensionale, i cui vettori hanno prodotto scalare normalizzato alla Dirac

$$\langle\langle z|z'\rangle\rangle = \delta^{(2)}(z - z') \equiv \delta(\text{Re}z - \text{Re}z') \delta(\text{Im}z - \text{Im}z'). \quad (3.5)$$

Nell'equazione (3.4) $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ indica un vettore nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$, $|x\rangle_\phi$ rappresenta un autovettore della quadratura \hat{X}_ϕ del modo interessato, e la notazione $|\rangle\rangle$ ricorda che lo stato è relativo a due modi.

Attraverso la rappresentazione numero della quadratura

$$\phi\langle x|n\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{in\phi}}{\sqrt{2^n n!}} \exp(-x^2) H_n(\sqrt{2}x), \quad (3.6)$$

e la seguente identità tra i polinomi di Hermite e di Laguerre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) H_n(x+y) H_{n+\lambda}(x+t) = 2^{n+\lambda} n! L_n^\lambda(-2yt) t^\lambda, \quad (3.7)$$

il vettore $|z\rangle\rangle$ in termini della base numero $\{|n\rangle \otimes |m\rangle\}$ si scrive

$$|z\rangle\rangle = \exp(i\text{Re}z\text{Im}z) \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m}(z, \bar{z}) |n\rangle \otimes |m\rangle, \quad (3.8)$$

con

$$c_{n,n+\lambda}(z, \bar{z}) = \bar{c}_{n+\lambda,n}(z, \bar{z}) = \frac{(-)^n}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n!}{(n+\lambda)!}} \bar{z}^\lambda L_n^\lambda(|z|^2) \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right). \quad (3.9)$$

L'autostato corrispondente all'autovalore nullo risulta

$$|0\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n |n\rangle \otimes |n\rangle. \quad (3.10)$$

A meno di un irrilevante fattore di fase, l'autostato $|z\rangle\rangle$ può essere generato da $|0\rangle\rangle$ mediante l'applicazione dell'operatore di spostamento (2.25) relativo indifferentemente ad uno dei due modi. Dall'identità (2.9), agendo sul modo a si ottiene infatti

$$D_a^\dagger(\alpha) \hat{Z} D_a(\alpha) = \hat{Z} + \alpha, \quad (3.11)$$

cosicch 

$$|z\rangle\rangle = e^{i\phi_z} \exp(za^\dagger - \bar{z}a) |0\rangle\rangle. \quad (3.12)$$

3.2 Apparato sperimentale

Gli stati $|z\rangle\rangle$ normalizzati alla Dirac hanno numero medio complessivo di fotoni infinito. Mostriamo ora uno schema sperimentale con cui   possibile ottenere stati fisicamente realizzabili che approssimano gli autostati $|z\rangle\rangle$ per numero medio di fotoni infinito.

Osserviamo anzitutto che lo stato $|0\rangle\rangle$ dell'equazione (3.10)   ottenibile dallo stato normalizzato

$$|0\rangle\rangle_\lambda = (1 - \lambda^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n |n\rangle \otimes |n\rangle, \quad (3.13)$$

nel limite $\lambda \rightarrow 1^-$.

Lo stato $|0\rangle_\lambda$ è chiamato “twin-beams” ed è realizzato all’uscita di un amplificatore “phase insensitive” (PIA), per stati di ingresso entrambi nello stato di vuoto. Un PIA è un apparato a quattro porte (i due modi a e b del campo all’ingresso dell’amplificatore ed i rispettivi modi evoluti all’uscita A e B) che fornisce la seguente evoluzione unitaria del campo [21]

$$\begin{pmatrix} A \\ B^\dagger \end{pmatrix} = \hat{N}^\dagger \begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} a - \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} b^\dagger \\ -\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} a + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} b^\dagger \end{pmatrix}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (3.14)$$

con guadagno $G = (1 - \lambda^2)^{-1}$ indipendente dalla fase del campo elettrico, ovvero

$$|\langle A_\phi \rangle|^2 = G |\langle a_\phi \rangle|^2. \quad (3.15)$$

L’operatore unitario \hat{N} risulta

$$\hat{N} = \exp[\xi(ab - a^\dagger b^\dagger)], \quad \xi = \tanh^{-1} \lambda, \quad (3.16)$$

cosicché lo stato $|0\rangle_\lambda$ si scrive

$$|0\rangle_\lambda = \exp[\tanh^{-1} \lambda (ab - a^\dagger b^\dagger)] |0\rangle \otimes |0\rangle. \quad (3.17)$$

Il limite $\lambda \rightarrow 1^-$ comporta guadagno G infinito e $\xi \rightarrow \infty$. ξ è legato all’accoppiamento e al tempo relativi alla hamiltoniana di interazione in pittura di Schrödinger

$$\hat{H}_I = k(a^\dagger b^\dagger e^{-i\Omega t} + ab e^{i\Omega t}), \quad (3.18)$$

con $kt = \xi$ e $\Omega = \omega_a + \omega_b$, somma della frequenze dei modi a e b . La dipendenza parametrica da t nella (3.18) è ottenuta utilizzando come pompa un terzo modo c a frequenza Ω , considerato classico in quanto mantenuto in uno stato coerente altamente eccitato. La hamiltoniana (3.18) dipende dal tempo in quanto corrisponde effettivamente al valore di aspettazione della hamiltoniana a tre modi sullo stato coerente del modo c . Questa ultima approssimazione è in genere indicata come “approssimazione parametrica”.

Il secondo passo consiste nel generare da $|0\rangle_\lambda$ stati fisici $|z\rangle_\lambda$ che approssimino per guadagno infinito gli stati $|z\rangle$. Operiamo quindi uno spostamento sullo stato “twin-beams”, scrivendo in modo analogo all’equazione (3.12)

$$|z\rangle_\lambda = e^{i\phi z} \exp(za^\dagger - \bar{z}a) (1 - \lambda^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n |n\rangle \otimes |n\rangle. \quad (3.19)$$

Dalla relazione

$$\langle \hat{D}_a^\dagger(z) a^\dagger a \hat{D}_a(z) \rangle = \langle a^\dagger a \rangle + |z|^2 \quad (3.20)$$

si calcola per lo stato $|z\rangle_\lambda$ il numero medio di fotoni

$$\bar{n} = {}_\lambda \langle \langle z | a^\dagger a + b^\dagger b | z \rangle \rangle_\lambda = |z|^2 + \frac{2\lambda^2}{1 - \lambda^2}. \quad (3.21)$$

Lo spostamento nell’equazione (3.19) è ottenibile combinando lo stato “twin-beams” con un forte oscillatore locale coerente $|\sigma\rangle$ ($\sigma \rightarrow \infty$) ad uguale frequenza del modo a in un *beam-splitter* con trasmissività $\eta \rightarrow 1^-$.

La trasformazione lineare del campo elettromagnetico operata da un *beam-*

splitter con coefficiente di trasmissività η risulta infatti [21]

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \hat{M}^\dagger \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} a + \sqrt{1-\eta} c \\ -\sqrt{1-\eta} a + \sqrt{\eta} c \end{pmatrix} \quad 0 < \eta < 1, \quad (3.22)$$

dove a e c sono i due modi di ingresso (ad uguali frequenze e distinte polarizzazioni) ed \hat{M} ha la forma

$$\hat{M} = \exp[\zeta(a^\dagger c - ac^\dagger)], \quad \zeta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}. \quad (3.23)$$

Nel limite di trasmissività ideale $\eta \rightarrow 1^-$, con modo c mantenuto in uno stato coerente $|\sigma\rangle$ altamente eccitato e tale che

$$|\sigma| \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} \simeq |\sigma| \sqrt{1-\eta} = \text{cost} = |\alpha|, \quad (3.24)$$

\hat{M} agisce sul modo a come l'operatore spostamento $\hat{D}_a(\alpha)$. Lo schema sperimentale per generare lo stato (3.19) è rappresentato nella Fig. 3.1.

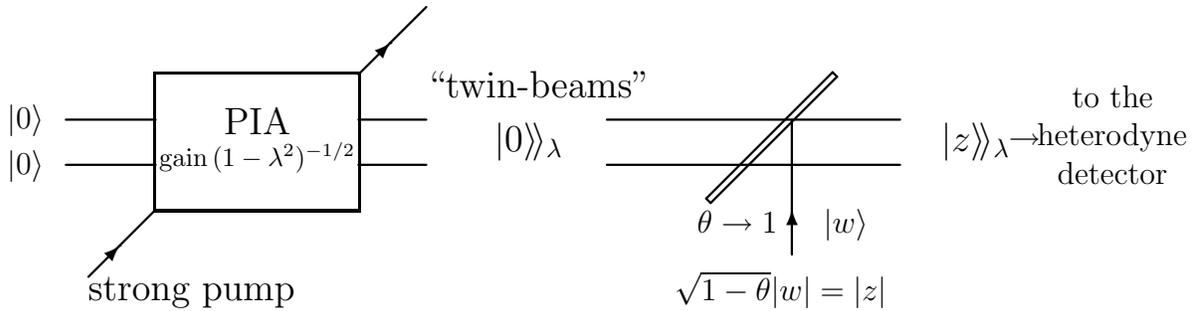


Figura 3.1: Schema sperimentale per la misura di fase del campo a due modi.

Lo stato di ingresso del PIA è il vuoto. In linea di principio l'uscita è caratterizzata da tutti i possibili "twin-beams" relativi a coppie di modi le cui

frequenze giacciono nella banda di risposta dell'amplificatore, con somma pari alla frequenza della pompa classica. Le frequenze dei modi a e b vengono selezionate dal rivelatore eterodina, il quale combina in un *beam-splitter* i due modi con un oscillatore locale a frequenza $(\omega_a + \omega_b)/2$. Si è mostrato [22] che la fotocorrente complessa di uscita misurata alla frequenza $|\omega_a - \omega_b|/2$, nei limiti di efficienza quantica unitaria, forte oscillatore locale ed elevata trasmissività del *beam-splitter*, coincide proprio l'operatore $\hat{Z} = a + b^\dagger$. Il rivelatore eterodina effettua pertanto la misura dell'operatore non hermitiano \hat{Z} , equivalente alla misura congiunta della coppia di osservabili commutanti \hat{Z}_1 e \hat{Z}_2 della (3.2). I modi a e b rappresentano rispettivamente il segnale e la banda immagine. Nella misura eterodina ordinaria il modo della banda immagine è vuoto ed è responsabile dei 3 dB di rumore aggiunto; in modo analogo alla Ref.[20], il rivelatore viene qui utilizzato in modo non convenzionale, ovvero con banda immagine non vuota.

3.3 Distribuzione di probabilità della fase

La densità di probabilità di ottenere il valore complesso z per la fotocorrente di uscita \hat{Z} con il campo nello stato $|w\rangle\rangle_\lambda$ è data da

$$\begin{aligned}
|\langle\langle z|w\rangle\rangle_\lambda|^2 &= (1 - \lambda^2) \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n c_{n,n}(z - w, \overline{z - w}) \right|^2 = \\
&= \frac{1 - \lambda^2}{\pi} \exp(-|z - w|^2) \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n(|z - w|^2) \right|^2 = \\
&= \frac{1}{\pi \Delta_\lambda^2} \exp\left(-\frac{|z - w|^2}{\Delta_\lambda^2}\right), \tag{3.25}
\end{aligned}$$

dove si è sfruttata l'identità

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) \lambda^n = (1 - \lambda)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{\lambda x}{\lambda - 1}\right), \quad |\lambda| < 1 \quad (3.26)$$

con $\alpha = 0$, e si è posto

$$\Delta_\lambda^2 = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}. \quad (3.27)$$

Nel limite $\lambda \rightarrow 1^-$ si ottiene

$$|\langle\langle z|w \rangle\rangle_\lambda|^2 \rightarrow \delta^{(2)}(z - w), \quad (3.28)$$

a conferma del fatto che lo stato $|w\rangle\rangle_\lambda$ approssima l'autostato $|w\rangle\rangle$ della corrente \hat{Z} .

Le relazioni di commutazione (3.3) fanno sí che dall'operatore unitario

$$e^{i\hat{\phi}} = \hat{Z} \left(\hat{Z}^\dagger \hat{Z} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

si possa definire l'operatore di fase autoaggiunto

$$\hat{\phi} = \arg(\hat{Z}) = -\frac{i}{2} \log \frac{\hat{Z}}{\hat{Z}^\dagger}, \quad (3.30)$$

ben definito sullo spazio di Hilbert \mathcal{H}_0^\perp , complemento ortogonale in \mathcal{H} dello spazio \mathcal{H}_0 sotteso dall'autovettore (3.10) corrispondente all'autovalore nullo.

Indicando con \hat{n}_d l'operatore differenza di numero di fotoni

$$\hat{n}_d = a^\dagger a - b^\dagger b, \quad (3.31)$$

dalla relazione

$$\left[\hat{n}_d, e^{im\hat{\phi}} \right] = -m e^{im\hat{\phi}} \quad (3.32)$$

e dallo sviluppo di $\hat{\phi}$ attorno all'identità

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= (-i) \log \left[\left(e^{i\hat{\phi}} - 1 \right) + 1 \right] = (-i) \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} \left(e^{i\hat{\phi}} - 1 \right)^n = \\ &= (-i) \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} e^{im\hat{\phi}} (-)^{n-m},\end{aligned}\quad (3.33)$$

si mostra che \hat{n}_d e $\hat{\phi}$ sono canonicamente coniugati, ovvero

$$[\hat{n}_d, \hat{\phi}] = i. \quad (3.34)$$

La misura della fase $\hat{\phi}$ è descritta dalla densità di probabilità marginale della (3.25), ovvero

$$\begin{aligned}p(\phi) &= \frac{1}{\pi \Delta_\lambda^2} \int_0^{+\infty} dr r \exp \left(-\frac{|r e^{i\phi} - |w| e^{i\theta}|^2}{\Delta_\lambda^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{|w|^2}{\Delta_\lambda^2} \right) + \frac{|w|}{\pi \Delta_\lambda} \cos(\phi - \theta) \times \\ &\times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{|w| \cos(\phi - \theta)}{\Delta_\lambda} \right) \right] \exp \left(-\frac{|w|^2}{\Delta_\lambda^2} \sin^2(\phi - \theta) \right)\end{aligned}\quad (3.35)$$

in cui $\theta = \arg(w)$, ed $\operatorname{erf}(x)$ indica la funzione errore

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt \exp(-t^2). \quad (3.36)$$

L'integrale in r dell'equazione (3.35) somma le degenerazioni degli autovettori $|z\rangle$; l'autovettore (3.10) corrispondente all'autovalore nullo non è degenere, e dà un contributo di misura nulla all'integrale. Il termine gaussiano indipendente da ϕ nell'equazione (3.35) fornisce per stato di ingresso "twin-beams" (3.13) una distribuzione di probabilità della fase uniforme.

Per $\Delta_\lambda \ll |w|$ l'equazione (3.35) approssima la forma gaussiana

$$p(\phi) \simeq \frac{|w|}{\sqrt{\pi}\Delta_\lambda} \exp \left[-\frac{|w|^2}{\Delta_\lambda^2} (\phi - \theta)^2 \right]. \quad (3.37)$$

Per distribuzioni gaussiane la media massimizza la verosomiglianza ed è un estimatore asintoticamente efficiente dello spostamento di fase θ nell'equazione (3.37), con efficienza uguale alla varianza [23]. La sensitività di fase è pertanto ben definita come varianza della gaussiana (3.37) e risulta

$$\delta\phi = \langle \Delta\phi^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta_\lambda}{|w|}. \quad (3.38)$$

Nel limite di guadagno infinito al PIA ($\lambda \rightarrow 1^-$) le relazioni (3.21) e (3.27) si trascrivono

$$\Delta_\lambda^2 \simeq \frac{1}{2}(1 - \lambda), \quad \bar{n} \simeq |w|^2 + (1 - \lambda)^{-1}. \quad (3.39)$$

Dalle (3.38) e (3.39) segue

$$\delta\phi \bar{n} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - \lambda} |w| + \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda} |w|} \right]. \quad (3.40)$$

Ottimizzando $\delta\phi$ in funzione di $|w|$ con \bar{n} fissato si ottiene la sensitività

$$\delta\phi \simeq \frac{1}{\bar{n}}, \quad (3.41)$$

con la condizione $|w|^2 = (1 - \lambda)^{-1}$, la quale richiede che al numero medio complessivo di fotoni dello stato d'ingresso (3.21) contribuiscano in ugual misura lo stato “twin-beams” (3.13) all'uscita del PIA e lo spostamento nella (3.19) generato dall'oscillatore locale, cosicché valgano rispettivamente per i fotoni di segnale e per il guadagno del PIA le relazioni

$$|w|^2 = \frac{\bar{n}}{2}; \quad G = \frac{\bar{n}}{4}. \quad (3.42)$$

3.4 Limiti di validità

La sensitività (3.41) obbedisce alla stessa legge di potenza cui è sottoposta la sensitività ideale per la misura di fase di un singolo modo del campo, apportando un miglioramento per un fattore costante uguale a 1.36 (cfr. [18]). Il risultato (3.41) è stato ottenuto nell'ipotesi di efficienza quantica unitaria del fotorivelatore dell'eterodina. Sotto questa ipotesi, come si è affermato, la fotocorrente complessa misurata corrisponde all'operatore $\hat{Z} = a + b^\dagger$. Osservando che la distribuzione di probabilità di ciascuna fotocorrente reale $\hat{Z}_1 = \text{Re}\hat{Z}$ e $\hat{Z}_2 = \text{Im}\hat{Z}$ si può ottenere come trasformata di Fourier della funzione generatrice dei momenti

$$\chi_j(\lambda) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \exp \left(i\lambda \hat{Z}_j \right) \right] \quad (3.43)$$

secondo la relazione

$$P(z_j) = \int_R \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda z_j} \chi_j(\lambda) \quad j = 1, 2, \quad (3.44)$$

la POM dell'apparato per la variabile complessa z risulta

$$\frac{d\hat{\mu}(z, \bar{z})}{d^2z} = \int_R \frac{d\mu}{2\pi} \int_R \frac{d\nu}{2\pi} \text{Tr}_P \left[\hat{\rho}_P e^{i\mu(\hat{Z}_1 - \text{Re}z) + i\nu(\hat{Z}_2 - \text{Im}z)} \right]. \quad (3.45)$$

Operando il cambiamento di variabile $\lambda = (i\mu - \nu)/2$ ed evidenziando gli operatori di spostamento relativi ai modi di segnale a e della banda immagine b , la (3.45) si riscrive

$$\frac{d\hat{\mu}(z, \bar{z})}{d^2z} = \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi^2} e^{z\bar{\lambda} - \bar{z}\lambda} \hat{D}_a(\lambda) \text{Tr}_P \left[\hat{\rho}_P \hat{D}_b(-\bar{\lambda}) \right]. \quad (3.46)$$

Nella misura eterodina ordinaria, essendo la banda immagine vuota, dalla relazione

$$\langle 0|\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \langle 0|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \quad (3.47)$$

e attraverso un calcolo analogo a quello operato per la determinazione della POM coerente (2.30), l'equazione (3.46) fornisce essa stessa la POM

$$\frac{d\hat{\mu}(z, \bar{z})}{d^2z} = \frac{1}{\pi}|z\rangle\langle z|. \quad (3.48)$$

D'altra parte, nella misura non convenzionale utilizzata nello schema di misura sopra esposto, la banda immagine non è vuota, ma è anzi parte integrante del segnale che si vuole analizzare, e pertanto nella (3.46) neppure la traccia sul modo b deve essere eseguita. In questo caso troviamo la POM

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mu}(z, \bar{z})}{d^2z} &= \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi^2} e^{z\bar{\lambda} - \bar{z}\lambda} \hat{D}_a(\lambda) \hat{D}_b(-\bar{\lambda}) = \\ &= \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi^2} \exp\left[\left(z - \hat{Z}\right)\bar{\lambda} - \left(z - \hat{Z}\right)^\dagger \lambda\right] = \\ &= \delta^2\left(z - \hat{Z}\right) = |z\rangle\langle z|, \end{aligned} \quad (3.49)$$

la quale giustifica l'uso della formula statistica di Born nel calcolo della distribuzione di probabilità (3.25).

Un fotorivelatore con efficienza quantica $\eta < 1$ è equivalente [24] ad un fotorivelatore ideale preceduto da un *beam-splitter* con trasmissività η , in cui i modi a e b interagiscono rispettivamente con due modi v e w entrambi vuoti, i quali rappresentano le perdite dovute alla rivelazione non efficiente. Assumendo η costante nell'intervallo compreso tra le frequenze dei modi di

segnale e di banda immagine, la fotocorrente complessa \hat{Z}_η opportunamente riscalata risulta in questo caso

$$\hat{Z}_\eta = a + \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} v + b^\dagger + \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} w^\dagger, \quad (3.50)$$

cosicché la relazione analoga alla (3.46) si scrive

$$\frac{d\hat{\mu}_\eta(z, \bar{z})}{d^2z} = \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi^2} e^{z\bar{\lambda} - \bar{z}\lambda} \hat{D}_a(\lambda) \text{Tr}_P [\hat{\rho}_P \hat{D}_b(-\bar{\lambda}) \hat{D}_v(\lambda_\eta) \hat{D}_w(-\bar{\lambda}_\eta)] , \quad (3.51)$$

dove si è posto

$$\lambda_\eta = \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} \lambda . \quad (3.52)$$

Calcolando la traccia nella (3.51) sui modi vuoti b, v, w si ottiene la POM per la misura eterodina ordinaria con efficienza quantica η

$$\frac{d\hat{\mu}_\eta(z, \bar{z})}{d^2z} = \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi^2} e^{z\bar{\lambda} - \bar{z}\lambda} \hat{D}_a(\lambda) e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 - |\lambda_\eta|^2} . \quad (3.53)$$

Rappresentando la bigaussiana in λ_η nella (3.53) attraverso la trasformata di Fourier in campo complesso della bigaussiana con varianza reciproca $\sigma^2 = (1-\eta)/\eta$, ossia

$$e^{-|\lambda|^2 \frac{1-\eta}{\eta}} = \int_C \frac{d^2\alpha}{\pi (1-\eta)/\eta} e^{\lambda\bar{\alpha} - \bar{\lambda}\alpha} e^{-|\alpha|^2 \frac{\eta}{1-\eta}} , \quad (3.54)$$

la POM (3.53) può esprimersi come convoluzione della POM ideale (3.48) con una gaussiana di varianza $(1-\eta)/\eta$, in formula

$$\frac{d\hat{\mu}_\eta(z, \bar{z})}{d^2z} = \int_C \frac{d^2\alpha}{\pi (1-\eta)/\eta} e^{-|z-\alpha|^2 \frac{\eta}{1-\eta}} \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi} . \quad (3.55)$$

La POM per la misura eterodina con banda immagine non vuota, attraverso un analogo calcolo, si scriverà

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mu}_\eta(z, \bar{z})}{d^2z} &= \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi^2} \exp \left[(z - \hat{Z}) \bar{\lambda} - (z - \hat{Z})^\dagger \lambda \right] e^{-|\lambda_\eta|^2} = \\ &= \frac{\eta}{\pi(1-\eta)} \exp \left(-\frac{\eta}{1-\eta} |z - \hat{Z}|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

La POM (3.56) permette di calcolare la distribuzione di probabilità della fotocorrente complessa d'uscita nel caso di efficienza quantica $\eta < 1$. Si ricava in tal caso una convoluzione di due gaussiane, e pertanto nuovamente una gaussiana con varianza pari alla somma delle varianze delle prime due, cosicché la (3.27) si traspone nella relazione

$$\Delta_\lambda^2 \rightarrow \Delta_\lambda^2(\eta) = \Delta_\lambda^2 + \frac{1-\eta}{\eta}. \quad (3.57)$$

Per determinare i limiti di validità della sensitività ideale (3.41), osserviamo che il prodotto $\delta\phi \bar{n}$ della (3.40) si modifica, per $\eta < 1$, nell'espressione

$$\delta\phi \bar{n} = \frac{1}{2}|w| \left[\frac{1}{2}(1-\lambda) + \frac{1-\eta}{\eta} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{(1-\lambda)|w|^2} \right], \quad (3.58)$$

la quale fornisce per $1-\eta \ll 1-\lambda$ nuovamente il risultato (3.41), introduce per $\eta \simeq \lambda$ il fattore $3/2$, e determina infine per $1-\eta \gg 1-\lambda$ la sensitività

$$\delta\phi \simeq \sqrt{\frac{1-\eta}{2\bar{n}}}. \quad (3.59)$$

La dipendenza $\delta\phi \sim \bar{n}^{-1/2}$ è quella tipica di misura di fase convenzionale con stati coerenti [18].

3.5 Schema per misure ripetibili

Consideriamo la seguente hamiltoniana d'interazione

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -K \frac{i}{2} \left[(a^\dagger + b)(c - d^\dagger) - (a + b^\dagger)(c^\dagger - d) \right] = \\ &= -K \frac{i}{2} \left[(a^\dagger c + bc + ad + b^\dagger d) - \text{h.c.} \right] ,\end{aligned}\quad (3.60)$$

in cui a e b sono i due modi di sistema, c e d i due modi di probe, e K la costante d'accoppiamento.

Dalle definizioni (3.1) e (3.2) e ponendo in modo analogo

$$\hat{A} \equiv c + d^\dagger = \hat{A}_1 + i\hat{A}_2 ,\quad (3.61)$$

con

$$\hat{A}_1 = c_0 + d_0 \quad \hat{A}_2 = c_{\pi/2} - d_{\pi/2} ,\quad (3.62)$$

l'hamiltoniana (3.60) si riscrive

$$\hat{H} = K \left[\hat{Z}_1(c_{\pi/2} + d_{\pi/2}) - \hat{Z}_2(c_0 - d_0) \right] .\quad (3.63)$$

L'evoluzione di Heisenberg per gli operatori autoaggiunti di probe \hat{A}_1 e \hat{A}_2 , nelle condizioni di forte accoppiamento e breve durata dell'interazione ($K\tau = 1$), risulta

$$\hat{U}^\dagger \hat{A}_i \hat{U} = \hat{A}_i + \hat{Z}_i \quad i = 1, 2 ,\quad (3.64)$$

dove

$$\hat{U} = \exp(-i\hat{H}\tau) = \exp \left\{ -i \left[\hat{Z}_1(c_{\pi/2} + d_{\pi/2}) - \hat{Z}_2(c_0 - d_0) \right] \right\} \quad (3.65)$$

è l'operatore unitario di evoluzione temporale.

La ripetibilità della misura consiste nel fatto che la misura eterodina viene eseguita sui due modi “di probe”, senza distruggere il segnale di sistema. La misura dell'osservabile complessa di probe (3.61) compiuta al termine dell'interazione fornisce informazione riguardo alla distribuzione di probabilità dell'autovalore complesso z relativo all'operatore di sistema \hat{Z} . Tale informazione è contenuta nella POM $\hat{F}(z)$, la quale soddisfa alla relazione

$$\text{Tr}_S[\hat{F}(z)\hat{\rho}_S] = \text{Tr}_{S,P}[|z\rangle\rangle_{PP}\langle\langle z|\hat{U}(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P)\hat{U}^\dagger], \quad (3.66)$$

dove $|z\rangle\rangle_{PP}\langle\langle z|$ rappresenta il proiettore sullo spazio a due modi del probe $\mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_d$ relativo all'autovalore z di \hat{A} . Preparando il probe nello stato “twin-beams” (3.13) segue dalla (3.66)

$$\hat{F}(z) = {}_{P\lambda}\langle\langle 0|\hat{U}^\dagger|z\rangle\rangle_{PP}\langle\langle z|\hat{U}|0\rangle\rangle_{\lambda P} \doteq \hat{\Omega}^\dagger(z)\hat{\Omega}(z). \quad (3.67)$$

Dalla (3.65), dalle due equivalenti espressioni (3.4) degli autovettori $|z\rangle\rangle$, e dalla (3.25) con $w=0$, ponendo $\text{Re}z = z_1$ e $\text{Im}z = z_2$, otteniamo per l'operatore di sistema $\hat{\Omega}^\dagger(z)$ la relazione

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^\dagger(z) &= \exp \left\{ i\hat{Z}_1 \left(i\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \right) + i\hat{Z}_2 \left(i\frac{\partial}{\partial z_2} + z_1 \right) \right\} {}_{P\lambda}\langle\langle 0|z\rangle\rangle_P = \\ &= \exp \left\{ i\hat{Z}_1 \left(i\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \right) + i\hat{Z}_2 \left(i\frac{\partial}{\partial z_2} + z_1 \right) \right\} \frac{e^{i\phi z}}{\sqrt{\pi}\Delta_\lambda} \exp \left(-\frac{|z|^2}{2\Delta_\lambda^2} \right) = \\ &= \frac{e^{i\phi z}}{\sqrt{\pi}\Delta_\lambda} \exp \left\{ -\frac{(\hat{Z}_1 - z_1)^2 + (\hat{Z}_2 - z_2)^2}{2\Delta_\lambda^2} \right\} \\ &= \frac{e^{i\phi z}}{\sqrt{\pi}\Delta_\lambda} \exp \left(-\frac{|\hat{Z} - z|^2}{2\Delta_\lambda^2} \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

con Δ_λ dato dall'equazione (3.27).

La POM $\hat{F}(z)$ si scrive pertanto

$$\hat{F}(z) = \frac{1}{\pi\Delta_\lambda^2} \exp\left(-\frac{|\hat{Z} - z|^2}{\Delta_\lambda^2}\right), \quad (3.69)$$

fornendo per la distribuzione di probabilità la relazione

$$P(z|\hat{\rho}_S) = \text{Tr}[\hat{F}(z)\hat{\rho}_S] = \frac{1}{\pi\Delta_\lambda^2} \int_C d^2z' \langle z'|\hat{\rho}_S|z'\rangle \exp\left(-\frac{|z' - z|^2}{\Delta_\lambda^2}\right), \quad (3.70)$$

ovvero una convoluzione della formula statistica di Born con una gaussiana con varianza tanto minore quanto maggiore è il guadagno del PIA utilizzato per preparare il probe. Lo stato del sistema $\hat{\rho}_z$ dopo la misura con risultato z è dato secondo la (1.45) dalla relazione

$$\hat{\rho}_z = \frac{\hat{\Omega}(z) \hat{\rho} \hat{\Omega}^\dagger(z)}{\text{Tr}[\hat{F}(z)\hat{\rho}]} = \frac{1}{\pi\Delta_\lambda^2} \frac{\exp\left(-\frac{|\hat{Z}-z|^2}{2\Delta_\lambda^2}\right) \hat{\rho} \exp\left(-\frac{|\hat{Z}-z|^2}{2\Delta_\lambda^2}\right)}{\text{Tr}[\hat{F}(z)\hat{\rho}]}. \quad (3.71)$$

Osserviamo che il *beam-splitter* utilizzato nella misura demolitiva per generare lo spostamento nella (3.19) diviene qui irrilevante, in quanto è la hamiltoniana d'interazione (3.60) a trasferire segnale allo stato “twin-beams” prima della misura eterodina.

Attraverso un calcolo analogo a quello condotto per la determinazione della distribuzione di probabilità della fase nel caso di misura diretta, si ottiene per la POM marginale della fase μ l'espressione

$$d\hat{\mu}(\phi) = \int_0^{+\infty} d|z| |z| \hat{F}(z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|\hat{Z}|^2}{\Delta_\lambda^2}\right) + \frac{1}{\pi\Delta_\lambda} \operatorname{Re}\left(\hat{Z}e^{-i\phi}\right) \exp\left\{-\frac{1}{\Delta_\lambda^2} [\operatorname{Im}\left(\hat{Z}e^{-i\phi}\right)]^2\right\} \times \\
&\times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{1 + \operatorname{erf}\left[\frac{\operatorname{Re}\left(\hat{Z}e^{-i\phi}\right)}{\Delta_\lambda}\right]\right\}. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Per stato di preparazione del probe con numero di fotoni infinito ($\Delta_\lambda \rightarrow 0$) la (3.72) fornisce la POM ideale

$$d\hat{\mu}(\phi) = \delta(\hat{\Phi} - \phi) \tag{3.73}$$

con $\hat{\Phi} = \arg(\hat{Z})$ definito nella (3.30).

Circa la realizzabilità pratica dello schema di misura ripetibile illustrato, la hamiltoniana d'interazione (3.60) è ottenibile nei limiti dell'approssimazione parametrica attraverso l'impiego di due pompe classiche. La hamiltoniana d'interazione in pittura di Dirac viene isolata in approssimazione di onda rotante da termini di suscettività non lineare $\chi^{(2)}$ (*three-wave mixing*) utilizzando la seguente disposizione delle frequenze del modo di probe d e dei modi di pompa γ e ξ in funzione di quelle del primo modo di probe c e dei modi di segnale a e b ($\omega_a < \omega_b$)

$$\begin{cases} \omega_d = \omega_c + \omega_b - \omega_a \\ \omega_\xi = \omega_c - \omega_a \\ \omega_\gamma = \omega_c + \omega_b \end{cases}, \tag{3.74}$$

con le restrizioni

$$\begin{aligned}
&\omega_b \neq 2\omega_a; & \omega_c > \omega_b \\
&\omega_c \neq \frac{3}{2}\omega_a, 2\omega_a, \omega_a + \frac{\omega_b}{2}, \omega_a + \omega_b, 2\omega_a + \omega_b. \tag{3.75}
\end{aligned}$$

In questo modo si ottiene la hamiltoniana

$$\hat{H} \propto \left[(a^\dagger c \xi^\dagger + b^\dagger d \xi^\dagger + ad \gamma^\dagger + bc \gamma^\dagger) + \text{h.c.} \right], \quad (3.76)$$

che in approssimazione parametrica coincide con la (3.60).

In modo analogo un *four-wave mixing* in un mezzo con suscettività $\chi^{(3)}$ e tre pompe classiche permettono, con opportuna combinazione della frequenze, di ottenere la stessa hamiltoniana d'interazione.

Conclusioni

La teoria generale della misurazione quantistica illustrata nel primo capitolo è stata anzitutto applicata per determinare il migliore schema di misura congiunta ripetibile di una coppia di quadrature coniugate di un singolo modo del campo di radiazione. Si è ricavata una misura a valore di operatori positivi, la POM coerente, la quale fornisce per la distribuzione di probabilità congiunta una funzione positiva e normalizzata, nota in ottica quantistica come funzione di Husimi. Lo stato di riduzione in seguito alla misura congiunta si è mostrato essere indipendente dallo stato iniziale e coincidente con lo stato coerente relativo al risultato ottenuto, lo stato cioè più compatibile con l'informazione estratta dal processo di misura.

Tra le POM marginali ricavabili dalla POM coerente ottenuta, quella relativa alla fase risulta la più interessante nell'ambito dell'interferometria ad alta sensibilità e della rivelazione di onde gravitazionali. Lo schema di misura presentato determina una POM per la fase coincidente con quella ottenibile da rivelazione con doppia omodina, caratterizzata da rumore aggiunto rispetto alla POM ideale individuata dalla teoria quantistica della stima. La semili-

mitatezza dell'operatore numero, al quale la fase è canonicamente coniugata nel senso della trasformata di Fourier, rappresenta la causa ultima dell'impossibilità di una misura esatta di fase. In termini di campo a due modi, un operatore di fase autoaggiunto diviene invece coniugato ad un operatore differenza di numero, non più limitato inferiormente.

Questa considerazione ha suggerito lo schema sperimentale per la misura della fase di un campo a due modi presentato nel terzo capitolo. Il metodo è basato su uno schema non convenzionale di rivelazione eterodina con i modi di segnale e banda immagine in stati quantistici fortemente correlati. La realizzazione sperimentale del metodo è fattibile, seppure tecnicamente complessa, e consente la misura di fase al limite della sensibilità ideale. Lo schema per la misura ripetibile illustrato, mediante l'impiego di raffinate tecniche nell'ambito dell'ottica non lineare, risulta anch'esso sperimentalmente realizzabile e presenta analoghe caratteristiche ideali.

Bibliografia

- [1] M. Ozawa. Realization of measurement and the standard quantum limit. In P. Tombesi and E. R. Pike, editors, *Squeezed and Nonclassical Light*, pp. 263-286, Plenum, New York, 1989.
- [2] M. Ozawa. Quantum Limits of Measurements and Uncertainty Principle. In *Lectures Notes in Physics*, Vol. 378, Spriger-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
- [3] M. Ozawa. Quantum measuring processes of continuous observables. *J. Math. Phys.*, **25**, 79-87, (1984).
- [4] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton UP, Princeton, NJ, 1955.
- [5] E. B. Davies and J. T. Lewis. An operational approach to quantum probability. *Commun. Math. Phys.*, **17**, 239-260, (1970).
- [6] M. Ozawa. Conditinal probability and a posteriori states in quantum mechanics. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **21**, 279-295, (1985).

- [7] H. P. Robertson. The uncertainty principle. *Phys. Rev.*, **34**(1), 163-164, (1929).
- [8] C. M. Caves. Defense of the standard quantum limit for free-mass position. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 2465-2468, (1985).
- [9] H. P. Yuen. Contractive states and the standard quantum limit for monitoring free-mass positions. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 719-722, (1983).
- [10] M. Ozawa. Measurement breaking the standard quantum limit for free-mass position. *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 385-388, (1988).
- [11] M. Ozawa. Quantum-mechanical models of position measurements. *Phys. Rev. A* **41**, 1735-1737, (1990).
- [12] A. S. Holevo. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [13] J. P. Gordon and W. H. Louisell. Simultaneous measurement of noncommuting observables. In *Physics of Quantum Electronics*, pp. 833-840, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [14] E. Arthurs and J. L. Kelly. On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables. *Bell. Syst. Tech. J.*, **44**, 725-729, (1965).
- [15] J. H. Shapiro and S. R. Shepard. *Phys. Rev. A*, **43**, 3795 (1991).
- [16] M. Ban. *Phys. Rev. A*, **50**, 2785 (1994).

- [17] J. H. Shapiro. *Physica Scripta T*, **48**, 105 (1993).
- [18] G. M. D'Ariano and M. Paris. *Phys. Rev. A*, **49**, 3022 (1994).
- [19] C. W. Helstrom. *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic, New York, 1976.
- [20] J. H. Shapiro and S. S. Wagner. *IEEE J. Quantum Electron. QE*, **20**, 803 (1984).
- [21] G. M. D'Ariano. *Int. J. Mod. Phys. B*, **6**, 1292 (1992).
- [22] H. P. Yuen and J. H. Shapiro. *IEEE Trans. Inform. Theory IT*, **26**, 78 (1980).
- [23] H. Cramér. *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1951, pp.489-506.
- [24] C. W. Gardiner. *Quantum noise*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.