

Da quali principi
discende la Meccanica
Quantistica?

Giacomo Mauro D'Ariano

Università di Pavia

Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere, 31 gennaio 2008

Premessa generale

Premessa generale

- Si eseguono esperimenti per ottenere informazioni sullo stato di un sistema fisico oggetto.

Premessa generale

- Si eseguono esperimenti per ottenere informazioni sullo stato di un sistema fisico oggetto.
- La conoscenza di tale stato permette di predire risultati di futuri esperimenti.

Premessa generale

- Si eseguono esperimenti per ottenere informazioni sullo stato di un sistema fisico oggetto.
- La conoscenza di tale stato permette di predire risultati di futuri esperimenti.
- Poichè occorre necessariamente operare in condizioni di incertezza (conoscenza parziale a priori sia del sistema che dell'apparato), le regole per l'esperimento sono assegnate in ambito probabilistico.

Definizione di esperimento

Definizione di esperimento

- L'**esperimento** su un **sistema oggetto** consiste nel farlo interagire con un **apparato**, il quale produrrà un'**evento** segnalato dall'apparato fra un insieme di eventi possibili, ognuno dei quali può avvenire con una certa probabilità.

Definizione di esperimento

- L'**esperimento** su un **sistema oggetto** consiste nel farlo interagire con un **apparato**, il quale produrrà un'**evento** segnalato dall'apparato fra un insieme di eventi possibili, ognuno dei quali può avvenire con una certa probabilità.
- Dalla conoscenza di quale evento è effettivamente avvenuto (il **risultato** dell'esperimento), si ottiene informazione sullo stato posseduto dal sistema all'inizio dell'esperimento.

Definizione di esperimento

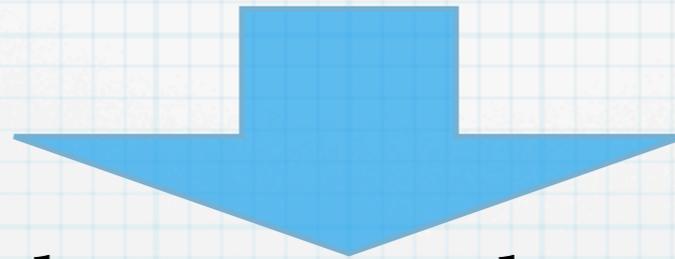
- L'**esperimento** su un **sistema oggetto** consiste nel farlo interagire con un **apparato**, il quale produrrà un'**evento** segnalato dall'apparato fra un insieme di eventi possibili, ognuno dei quali può avvenire con una certa probabilità.
- Dalla conoscenza di quale evento è effettivamente avvenuto (il **risultato** dell'esperimento), si ottiene informazione sullo stato posseduto dal sistema all'inizio dell'esperimento.
- L'esperimento viene quindi identificato con un insieme di eventi probabilistici.

Postulato 1

Ogni esperimento non può essere influenzato da esperimenti futuri.

Postulato 1

Ogni esperimento non può essere influenzato da esperimenti futuri.



- È possibile introdurre una descrizione a matrici (C^* -algebra) degli eventi, i quali vengono identificati con trasformazioni del sistema in oggetto.
- Chiamiamo quest'algebra *algebra delle matrici sperimentali*.

Deduzione dell'algebra sperimentale

- Poichè la conoscenza dello “stato” del sistema permette di predire i risultati di esperimenti su tale sistema, allora lo **stato** ω per definizione è una regola di probabilità $\omega(\mathcal{A})$ per tutti i possibili eventi sperimentali \mathcal{A} .
- Si introduce la **composizione di eventi** $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ come l'evento corrispondente alla successione dell'evento \mathcal{A} seguito dall'evento \mathcal{B} in una cascata di due esperimenti sullo stesso sistema (tale regola di composizione non è commutativa).

Deduzione dell'algebra sperimentale

- Si definisce quindi lo **stato condizionato** $\omega_{\mathcal{A}}$ dall'evento \mathcal{A} come la regola di probabilità condizionata dalla conoscenza dell'avvenuto evento \mathcal{A} .
- Il condizionamento viene quindi identificato con l'**evoluzione dello stato** a seguito dell'evento, e l'evento viene identificato con una **trasformazione** di stato.

Deduzione dell'algebra sperimentale

Abbiamo ora due tipi di equivalenza di trasformazioni:

- **equivalenza dinamica** che identifica trasformazioni che producono lo stesso cambiamento di stato;
- **equivalenza informazionale** che identifica trasformazioni che avvengono con la stessa probabilità per ogni stato.
- Le classi di equivalenza informazionali sono i cosiddetti **effetti** della Meccanica Quantistica, i quali possono essere visti a loro volta come funzionali sugli stati.
- Gli **eventi si possono** anche **sommare** (corrispondentemente all'unione di eventi), **si possono moltiplicare per numeri** $0 \leq \lambda \leq 1$ (corrispondentemente al riscaldamento della probabilità dell'evento).

Deduzione dell'algebra sperimentale

In questo modo si introduce una struttura di monoide convesso sugli eventi=trasformazioni, il quale genera un cono convesso con sovrainposta una legge di composizione interna, che genera a sua volta uno spazio lineare (a piacimento sui reali o sui complessi). Le trasformazioni formano quindi un'algebra.

Si costruisce quindi il cono generato dagli stati e il suo cono duale generato dagli effetti, e questi spaziano a loro volta degli spazi lineari (reali o complessi).

Deduzione dell'algebra sperimentale

[dimensione finita]

Deduzione dell'algebra sperimentale

[dimensione finita]

- È possibile dimostrare che esiste almeno un **esperimento informazionalmente completo minimale**, ovvero un esperimento con numero minimo di eventi che permette di valutare lo stato del sistema---in altri termini tutte le probabilità si possono scrivere come combinazioni lineari delle probabilità degli eventi di tale esperimento.

Deduzione dell'algebra sperimentale

[dimensione finita]

- È possibile dimostrare che esiste almeno un **esperimento informazionalmente completo minimale**, ovvero un esperimento con numero minimo di eventi che permette di valutare lo stato del sistema---in altri termini tutte le probabilità si possono scrivere come combinazioni lineari delle probabilità degli eventi di tale esperimento.
- L'esperimento informazionalmente completo funziona come una **base** per lo spazio lineare degli effetti, in termini della quale possiamo definire un prodotto scalare per il quale la base è ortonormale.

Deduzione dell'algebra sperimentale

[dimensione finita]

- È possibile dimostrare che esiste almeno un **esperimento informazionalmente completo minimale**, ovvero un esperimento con numero minimo di eventi che permette di valutare lo stato del sistema--in altri termini tutte le probabilità si possono scrivere come combinazioni lineari delle probabilità degli eventi di tale esperimento.
- L'esperimento informazionalmente completo funziona come una **base** per lo spazio lineare degli effetti, in termini della quale possiamo definire un prodotto scalare per il quale la base è ortonormale.
- In questo modo le trasformazioni diventano un'algebra di matrici sullo spazio lineare degli effetti o sul suo duale degli stati: abbiamo così una C^* -algebra di trasformazioni, che chiameremo **C^* -algebra sperimentale** in quanto è possibile costruirla direttamente dalla conoscenza delle probabilità di tutti i possibili eventi per ogni possibile stato.

Quando l'algebra sperimentale è
quantistica?

Sketch:

Quando l'algebra sperimentale è quantistica?

Sketch:

- Si introducono **sistemi indipendenti (Postulato 2)**

Quando l'algebra sperimentale è quantistica?

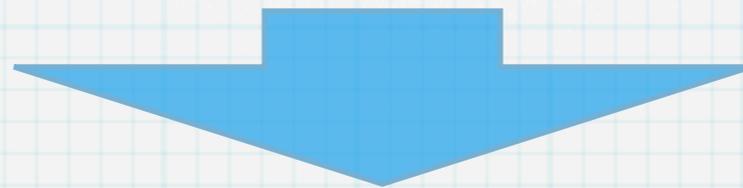
Sketch:

- Si introducono **sistemi indipendenti (Postulato 2)**
- Si ipotizza l'esistenza di **stati bipartiti dinamicamente e preparazionalmente fedeli (Postulato 3)**

Quando l'algebra sperimentale è quantistica?

Sketch:

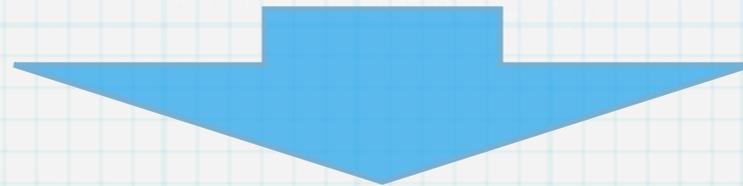
- Si introducono **sistemi indipendenti (Postulato 2)**
- Si ipotizza l'esistenza di **stati bipartiti dinamicamente e preparazionalmente fedeli (Postulato 3)**



Quando l'algebra sperimentale è quantistica?

Sketch:

- Si introducono **sistemi indipendenti (Postulato 2)**
- Si ipotizza l'esistenza di **stati bipartiti dinamicamente e preparazionalmente fedeli (Postulato 3)**

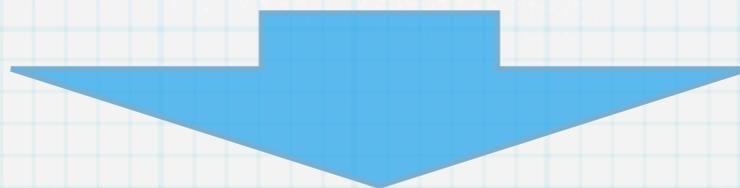


- Trasformazioni locali e stati bipartiti sono in corrispondenza uno-a-uno.

Quando l'algebra sperimentale è quantistica?

Sketch:

- Si introducono **sistemi indipendenti (Postulato 2)**
- Si ipotizza l'esistenza di **stati bipartiti dinamicamente e preparazionalmente fedeli (Postulato 3)**



- Trasformazioni locali e stati bipartiti sono in corrispondenza uno-a-uno.
- Ne consegue che per un sistema singolo c'è una mappa lineare (e quindi una corrispondenza biunivoca) fra il cono degli stati e quello degli effetti, che sono quindi isomorfi, ovvero ognuno dei due coni è self-duale, proprio come accade per le usuali C^* -algebre di operatori di sistemi quantistici o loro somme dirette, descrittivi ibridi classici-quantistici o, equivalentemente, sistemi quantistici con regole di superselezione.

Quando l'algebra sperimentale è
quantistica?

Sketch:

Quando l'algebra sperimentale è quantistica?

Sketch:

- Si può dimostrare che lo stesso stato Postulato 3 ha come conseguenza che la dimensione dello spazio degli effetti bipartiti è il quadrato di quella degli effetti di un sistema singolo. Vale quindi la regola del prodotto tensore per lo spazio lineare degli effetti e, di conseguenza, anche per quello degli stati (a seguito della self-dualità).

Quando l'algebra sperimentale è quantistica?

Sketch:

- Si può dimostrare che lo stesso stato Postulato 3 ha come conseguenza che la dimensione dello spazio degli effetti bipartiti è il quadrato di quella degli effetti di un sistema singolo. Vale quindi la regola del prodotto tensore per lo spazio lineare degli effetti e, di conseguenza, anche per quello degli stati (a seguito della self-dualità).
- Quindi il Postulato 3 seleziona una classe ristretta di teorie che contiene la Meccanica Quantistica.

Quando l'algebra sperimentale è quantistica?

Sketch:

- Si può dimostrare che lo stesso stato Postulato 3 ha come conseguenza che la dimensione dello spazio degli effetti bipartiti è il quadrato di quella degli effetti di un sistema singolo. Vale quindi la regola del prodotto tensore per lo spazio lineare degli effetti e, di conseguenza, anche per quello degli stati (a seguito della self-dualità).
- Quindi il Postulato 3 seleziona una classe ristretta di teorie che contiene la Meccanica Quantistica.
- Congettura: l'algebra sperimentale che discende dal Postulato 3 descrive solo ibridi classico-quantistico (è isomorfa alla somma diretta di C*-algebra di operatori su spazi di Hilbert, con gli effetti dati dal cono degli operatori positivi).